INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIV. BAND · ERSTES HEFT 1956

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 10,40

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN
einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Trostel, R., Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern mit Kreisringquerschnitt. Mit 9 Textabbildungen 1

Fuhrke, H., Bestimmung von Rahmenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. Mit 21 Textabbildungen 27

Rosenauer, N., Anwendung von komplexen Veränderlichen zur Synthese einer Kurbelschwinge mit vorgeschriebenen Grenzen der Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeit. Mit 3 Textabbildungen 43

Woinowsky-Krieger, S., Über die Verwendung von Bipolarkoordinaten zur Lösung einiger Probleme der Plattenbiegung. Mit 5 Textabbildungen 47

Weidenhammer, F., Das Stabilitätsverhalten der nichtlinearen Biegeschwingungen des axial pulsierend belasteten Stabes. Mit 12 Textabbildungen 53

INGENIEUR-ARCHIV

XXIV. BAND ERSTES HEFT 1956

Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern mit Kreisringquerschnitt*

Von R. Trostel

I. Einleitung. Die vorliegende Arbeit untersucht den Spannungszustand infolge instationärer rotationssymmetrischer Temperaturfelder in Hohlzylindern, deren Mantelflächen unter dem Einfluß zeitlich und bis auf die Achsensymmetrie auch örtlich beliebiger thermischer Randwirkungen stehen. Die Ermittlung eines Wärmespannungszustandes bedingt zunächst die Bestimmung des zugehörigen Temperaturfeldes, und daher wurde in Abschnitt II zunächst einiges über das achsensymmetrische Temperaturfeld vorangestellt [1], [2], [3]. Hieran schließt sich in Abschnitt III die Spannungsermittlung in einem endlich langen dicken Kreisrohr an. Das Ziel war die Ermittlung eines oberflächenspannungsfreien Wärmespannungszustandes, der schließlich durch Überlagerung der aus dem sog. thermisch-elastischen Verschiebungspotential [4] hervorgehenden Wärmespannungen mit gewissen, durch *Love*sche Funktionen [4], [5] charakterisierten Randspannungszuständen gefunden werden konnte. In Abschnitt IV wird eine Lösung für den mittleren Bereich eines sehr langen Rohres mit längs der Zylinderachse unabhängigen thermischen Randwirkungen angegeben und hieraus der Fall freier Zylinderenden und des ebenen Verzerrungszustandes hergeleitet, sowie auf den Fall des ebenen Spannungszustandes hingewiesen. In Abschnitt V finden sich einige Näherungsformeln für den Fall eines ebenen Temperaturfeldes, das durch Anheizen des Innenmantels entsteht, wobei für die Erwärmung des Innenmantels in erster Näherung des Anheizgesetz $\vartheta_i(t) = \vartheta_{is}\,(1 - e^{-\gamma_i t})$ als maßgebend angesehen wurde. Einem Beispiel folgen schließlich in Abschnitt VI einige grundsätzliche Bemerkungen zum achsensymmetrischen Problem an dünnen Kreisrohren (Kreiszylinderschalen), wo auf die Angabe entsprechender Formeln jedoch aus Gründen der Platzersparnis verzichtet wurde.

II. Das achsensymmetrische Temperaturfeld infolge zeitlich und örtlich beliebig vorgegebener Randwirkungen an den Mantelflächen. 1. Grundlagen der Wärmeleitung: die Wärmeleitungsgleichung.

Die Differentialgleichung für rotationssymmetrische quellenfreie Wärmeleitungsprobleme lautet

$$\Delta\vartheta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vartheta = \frac{c\gamma}{\lambda}\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = a^2\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,. \tag{1}$$

Hierbei sind c (cal/gr°C) die spezifische Wärmemenge pro Gewichtseinheit, γ (gr/cm³) das spezifische Gewicht und λ (cal/cmsec°C) die Wärmeleitzahl.

Gleichung (1) drückt das Gesetz der Erhaltung der Wärmeenergie aus und zwar mit Verwendung des *Fourier*schen Wärmeleitungstheorems. Hiernach ist die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchtretende Wärmemenge $\mathfrak{q}$ (cal/cm²sec) proportional dem Temperaturgradienten:

$$\mathfrak{q} = \{q_r;\ 0;\ q_z\} = -\lambda\,\mathrm{grad}\,\vartheta = -\lambda\left\{\frac{\partial\vartheta}{\partial r};\ 0;\ \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right\}. \tag{2}$$

Für die Formulierung der Randbedingungen hinsichtlich eines Wärmeüberganges in ein anderes Medium benötigt man noch eine zusätzliche Beziehung, die das *Newton*sche Abkühlungstheorem liefert. Entsprechend dem *Fourier*schen Theorem wird hier die aus dem erwärmten Körper in ein

* Gekürzte Fassung einer von der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg genehmigten Dissertation. Der Verfasser ist den beiden Berichtern, Herrn Prof. Dr.-Ing. *I. Szabó* und Herrn Prof. Dr.-Ing. *A. Teichmann* sehr zu Dank verpflichtet.

[1] *B. Riemann*, Partielle Differentialgleichungen, Braunschweig 1882.
[2] *H. S. Carslaw* u. *J. C. Jaeger*, Conductions of heat in solids, Oxford 1947.
[3] *R. Weyrich*, Zylinderfunktionen, Leipzig und Berlin 1937.
[4] *E. Melan* u. *H. Parkus*, Wärmespannungen stationärer Temperaturfelder, Wien 1953.
[5] *I. N. Sneddon*, Fourier-Transforms, New York, Toronto, London 1951.

umgebendes Medium der Temperatur ϑ_M übergehende Wärmemenge je Flächen- und Zeiteinheit

$$q_{Rand} = \mathfrak{q}_{Rand}\,\mathfrak{n} = -\alpha\,(\vartheta_M - \vartheta_R)\,, \tag{3}$$

also proportional zur Differenz der Temperaturen des Mediums (ϑ_M) und der Körperoberfläche (ϑ_R) gesetzt. Hierbei ist $\mathfrak{n}$ der Vektor der äußeren Normalen der Körperoberfläche und α (cal/cm²sec°C) die Wärmeübergangszahl.

2. Die Rand- und Anfangsbedingungen. a) Die Randbedingungen an den Mantelflächen. Die in der aufzufindenden Lösung enthaltenen Randwirkungen an den Mantelflächen $r = r_i$ und $r = r_a$ sollen mathematisch formuliert sein können

1) durch zeitlich und örtlich beliebig veränderliche vorgegebene Randtemperaturen $\vartheta_i(z, t)$ und $\vartheta_a(z, t)$ des Zylinders,

2) durch zeitlich und örtlich beliebig veränderliche vorgegebene Temperaturen $\vartheta_{Mi}(z, t)$ und $\vartheta_{Ma}(z, t)$, der im Innern bzw. am Außenrande befindlichen Medien,

3) durch zeitlich und örtlich beliebig veränderliche vorgegebene, durch die Mantelflächen des Zylinders hindurchtretende Wärmemengen $q_i(z, t)$ und $q_a(z, t)$ sowie

4) durch Kombinationen zwischen 1), 2) und 3).

Im Falle 1) lauten die Randbedingungen an den Mantelflächen

$$\vartheta(r_i, z, t) = \vartheta_i(z, t)\,, \qquad \vartheta(r_a, z, t) = \vartheta_a(z, t) \tag{4a}$$

und im Falle 3) mit (2)

$$-\lambda \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_i, z, t} = q_i(z, t)\,, \qquad -\lambda \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_a, z, t} = q_a(z, t)\,. \tag{4b}$$

Zur Darstellung der Randbedingungen im Falle 2) kann man zunächst nach (3) für die Mantelfläche $r = r_i$, indem man $\mathfrak{q}_{Rand} = \mathfrak{q}(r_i, z, t) = \{q_r(r_i, z, t);\ 0;\ q_z(r_i, z, t)\}$ und $\mathfrak{n} = \{n_r; n_\varphi; n_z\} = \{-1;\ 0;\ 0\}$ setzt $\mathfrak{q}_{Rand}\,\mathfrak{n} = -q_r(r_i, z, t) = -\alpha\,(\vartheta_{Mi}(z, t) - \vartheta(r_i, z, t))$ und entsprechend für die Mantelfläche $r = r_a$ schließlich $q_r(r_a, z, t) = -\alpha\,(\vartheta_{Ma}(z, t) - \vartheta(r_a, z, t))$ folgern, und damit erhält man mit Beachtung von (2)

$$q_r(r_i, z, t) = \alpha\,(\vartheta_{Mi}(z, t) - \vartheta(r_i, z, t)) = -\lambda \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_i, z, t},$$

$$q_r(r_a, z, t) = -\alpha\,(\vartheta_{Ma}(z, t) - \vartheta(r_a, z, t)) = -\lambda \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_a, z, t},$$

also

$$\vartheta(r_a, z, t) + \frac{\lambda}{\alpha} \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_a, z, t} = \vartheta_{Ma}(z, t)\,, \qquad \vartheta(r_i, z, t) - \frac{\lambda}{\alpha} \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_i, z, t} = \vartheta_{Mi}(z, t)\,. \tag{4c}$$

Wir erfassen nun sämtliche durch (4a) bis (4c) beschriebenen Randwertprobleme an den Mantelflächen und damit auch den Fall 4) durch folgende allgemeinere Randwertaufgabe, in der jene als Spezialfälle enthalten sind:

$$c_1\,\vartheta(r_a, z, t) + c_2 \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_a, z, t} = \varphi_a(z, t)\,, \qquad d_1\,\vartheta(r_i, z, t) + d_2 \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right|_{r_i, z, t} = \varphi_i(z, t)\,. \tag{5}$$

Hier sind c_1, c_2, d_1 und d_2 zunächst willkürliche Konstanten, und indem man beispielsweise $c_1 = d_1 = 1$, $c_2 = d_2 = 0$, $\varphi_a(z, t) = \vartheta_a(z, t)$ und $\varphi_i(z, t) = \vartheta_i(z, t)$ setzt, folgt sofort der Fall 1) usw. Mit den Randbedingungen (5), von denen im folgenden ausgegangen wird, sind demnach beliebige Randwirkungen an den Mantelflächen erfaßt.

b) Die Randbedingungen an den Stirnflächen $z = 0$ und $z = l$. Im Gegensatz zu den Mantelflächen soll die Lösung für das Temperaturfeld hinsichtlich der Stirnflächenrandbedingungen nur folgende Spezialfälle enthalten:

1) völlige Isolierung,

2) Wärmeübergang in ein Medium der Temperatur Null und

3) konstant gehaltene Randtemperatur Null.

Diese Fälle werden durch die allgemeinere Randwertaufgabe

$$a_1\,\vartheta(r, l, t) + a_2 \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right|_{r, l, t} = 0\,, \qquad b_1\,\vartheta(r, 0, t) + b_2 \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right|_{r, 0, t} = 0 \tag{6}$$

erfaßt, wobei die Konstanten a_1, a_2, b_1, und b_2 wieder entsprechend zu wählen sind.

c) Die Anfangsbedingung. Die Lösung soll einen zur Zeit $t = 0$ gegenüber seiner Umgebung nicht erwärmten Körper zum Gegenstand haben. Bezeichnet man die anfängliche überall als gleich vorausgesetzte Temperatur der Umgebung mit Null, so lautet die Anfangsbedingung

$$\vartheta(r, z, 0) = 0 \,. \tag{7}$$

3. Allgemeine Bemerkungen zur Ermittlung des Temperaturfeldes. Eine unmittelbare Entwicklung der den Rand- und Anfangsbedingungen (5) bis (7) angepassten Lösung für das Temperaturfeld ist nicht möglich. Hierfür muß vorerst vorbereitend die Aufgabe gelöst werden, das Temperaturfeld für den Fall zeitlich von $t = 0$ an konstanter Randwirkungen an den Mantelflächen zu bestimmen. Die Anfangs- und Randbedingungen lauten für diesen Fall in Spezialisierung von (5) bis (7):

$$a_1\,\vartheta(r, l, t) + a_2 \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{r,l,t} = 0 \,, \qquad b_1\,\vartheta(r, 0, t) + b_2 \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{r,0,t} = 0 \,, \tag{8}$$

$$c_1\,\vartheta(r_a, z, t) + c_2 \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right|_{r_a,z,t} = f_a(z) \,, \qquad d_1\,\vartheta(r_i, z, t) + d_2 \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right|_{r_i,z,t} = f_i(z) \,, \quad \text{für } t > 0 \tag{9}$$

$$\vartheta(r, z, 0) = 0 \,. \tag{10}$$

Diese Aufgabe wird dadurch bewältigt, daß man zunächst das Randwertproblem (8) und (9) durch die sog. stationäre Lösung $\vartheta_0(r, z)$ befriedigt, und zur stationären Lösung dann noch eine Zusatzlösung $\vartheta_1(r, z, t)$ instationären Charakters hinzugefügt, die die bereits durch die stationäre Lösung erfüllten Randbedingungen nicht mehr verändert, jedoch nun auch noch zusammen mit $\vartheta_0(r, z)$ der Anfangsbedingung (10) Genüge leistet. In Ziff. 4 wird die stationäre Lösung $\vartheta_0(r, z)$ ermittelt, während Ziff. 5 der instationären Zusatzlösung $\vartheta_1(r, z, t)$ gewidmet ist. In Ziff. 6 wird dann durch Überlagerung von $\vartheta_0(r, z)$ mit $\vartheta_1(r, z, t)$ die Lösung für die Rand- und Anfangsbedingungen (8) bis (10) gewonnen, und schließlich gelingt in Ziff. 7 die allgemeine Lösung für zeitlich und örtlich beliebige Randwirkungen an den Mantelflächen nach Maßgabe der Rand- und Anfangsbedingungen (5) bis (7).

4. Das stationäre Temperaturfeld. a) Allgemeines. Produktlösung der Wärmeleitungsgleichung. Im stationären Falle folgt aus (1) wegen $\partial\vartheta_0/\partial t = 0$ die Differentialgleichung

$$\Delta\vartheta_0 = \frac{\partial^2\vartheta_0}{\partial r^2} + \frac{1}{\partial r}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial r} + \frac{\partial^2\vartheta_0}{\partial z^2} = 0 \,.$$

Für ihre in Produktform darstellbaren Lösungen folgen nach Einführung des Produktansatzes $\vartheta_0(r, z) = R_0(r)\,Z_0(z)$ gemäß der *Daniell Bernoulli*schen Schlußweise mit der willkürlichen Konstanten ω_0^2 die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2Z_0}{dz^2} + \omega_0^2\,Z_0(z) = 0 \,, \qquad \frac{d^2R_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_0}{dr} - \omega_0^2\,R_0(r) = 0 \,, \tag{11}$$

deren Lösungen trigonometrische Funktionen bzw. modifizierte *Bessel*sche Funktionen Nullter Ordnung sind. Sie lauten

$$Z_0(z) = A_1 \cos\omega_0 z + B_1 \sin\omega_0 z \,, \qquad R_0(r) = A_2\,I_0(\omega_0 r) + B_2\,K_0(\omega_0 r) \,, \tag{12}$$

wobei die Konstanten A_k und B_k $(k = 1, 2)$ sowie ω_0 den Randbedingungen des vorliegenden Problems anzupassen sind.

b) Lösung der stationären Randwertaufgabe. Von der soeben gefundenen Produktlösung

$$\vartheta_0(r, z) = R_0(r)\,Z_0(z) = (A_1 \cos\omega_0 z + B_1 \sin\omega_0 z)\,(A_2\,I_0(\omega_0 r) + B_2\,K_0(\omega_0 r)) \tag{13}$$

soll nachfolgend entsprechend den Ausführungen von Ziff. 3 die Erfüllung folgender Randbedingungen gefordert werden:

$$a_1\,\vartheta_0(r, l) + a_2 \left.\frac{\partial\vartheta_0}{\partial z}\right|_{r,l} = 0 \,, \qquad b_1\,\vartheta_0(r, 0) + b_2 \left.\frac{\partial\vartheta_0}{\partial z}\right|_{r,0} = 0 \,, \tag{14}$$

$$c_1\,\vartheta_0(r_a, z) + c_2 \left.\frac{\partial\vartheta_0}{\partial r}\right|_{r_a,z} = f_a(z) \,, \qquad d_1\,\vartheta_0(r_i, z) + d_2 \left.\frac{\partial\vartheta_0}{\partial r}\right|_{r_i,z} = f_i(z) \,. \tag{15}$$

Zunächst können die beiden ersten Bedingungen (14) offenbar dann befriedigt werden, wenn man

das Bestehen folgender Beziehungen fordert:

$$a_1 Z_0(l) + a_2 \left.\frac{dZ_0}{dz}\right|_{z=l} = 0\,, \qquad b_1 Z_0(0) + b_2 \left.\frac{dZ_0}{dz}\right|_{z=0} = 0\,, \tag{16}$$

oder ausgeschrieben

$$A_1(a_1 \cos\omega_0 l - a_2\omega_0 \sin\omega_0 l) + B_1(a_1 \sin\omega_0 l + a_2\omega_0 \cos\omega_0 l) = 0\,,\ A_1 b_1 + B_1 b_2 \omega_0 = 0\,, \tag{17}$$

und aus diesem, in A_1 und B_1 linearen homogenen Gleichungssystemen können für diese nur dann von Null verschiedene Werte erwartet werden, sofern die Nennerdeterminante verschwindet, d. h. die Beziehung

$$\operatorname{tg}\omega_0 l = \omega_0 \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_1 + a_2 b_2 \omega_0^2} \tag{18}$$

besteht. Gleichung (18) ist eine transzendente Gleichung für die Eigenwerte ω_{0n} ($n = 1, 2, 3 \ldots$), die für das folgende als bekannt vorausgesetzt werden.

Aus dem Gleichungssystem (17) folgt überdies eine Abhängigkeit der Konstanten A_1 und B_1 in der Form

$$B_1 = -A_1 \frac{a_1 \cos\omega_0 l - a_2\omega_0 \sin\omega_0 l}{a_1 \sin\omega_0 l + a_2\omega_0 \cos\omega_0 l}\,,$$

so daß für $Z_0(z)$ mit der neuen Konstanten

$$C_1 = A_1 \frac{1}{a_1 \sin\omega_0 l + a_2\omega_0 l \cos\omega_0 l}$$

geschrieben werden kann

$$Z_0(z) = C_1[(a_1 \sin\omega_0 l + a_2\omega_0 \cos\omega_0 l)\cos\omega_0 z - (a_1 \cos\omega_0 l - a_2\omega_0 \sin\omega_0 l)\sin\omega_0 z] = C_1 \Psi(\omega_0 z)\,. \tag{19}$$

Die den Randbedingungen (14) genügende Produktlösung nimmt daher nach (13) mit (19) sowie mit den neuen Konstanten $A = C_1 A_2$ und $B = C_1 B_2$ die Gestalt

$$\vartheta_0(r, z) = \left(A\, I_0(\omega_0 r) + B\, K_0(\omega_0 r)\right)\Psi(\omega_0 z) \tag{20}$$

an, und da $\Psi(\omega_0 z)$ und damit auch die durch (20) gegebene Produktlösung für alle nach (18) berechenbaren Eigenwerte ω_{0n} die Randbedingungen (14) befriedigt, kann (20) in der Form

$$\vartheta_0(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n I_0(\omega_{0n} r) + B_n K_0(\omega_{0n} z)\right)\Psi(\omega_{0n} z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n I_{0n}(r) + B_n K_{0n}(r)\right)\Psi_n(z) \tag{21}$$

verallgemeinert werden, wobei die bisher noch willkürlichen Konstanten A_n und B_n aus den noch nicht berücksichtigten Randbedingungen (15) berechnet werden können. Indem man die Lösung (21) in (15) einsetzt, erhält man nämlich

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\left(c_1 I_{0n}(r_a) + c_2\omega_{0n} I'_{0n}(r_a)\right) + B_n\left(c_1 K_{0n}(r_a) + c_2\omega_{0n} K'_{0n}(r_a)\right)\right]\Psi_n(z) = f_a(z)\,,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\left(d_1 I_{0n}(r_i) + d_2\omega_{0n} I'_{0n}(r_i)\right) + B_n\left(d_1 K_{0n}(r_i) + d_2\omega_{0n} K'_{0n}(r_i)\right)\right]\Psi_n(z) = f_i(z)\,,
\end{aligned}\right| \tag{22}$$

wobei Striche die Ableitung nach dem Gesamtargument $\omega_{0n} r$ bedeuten sollen.

Um hieraus die A_n und B_n berechnen zu können, ist es erforderlich, die vorgegebenen Randfunktionen $f_a(z)$ und $f_i(z)$ zunächst nach den Eigenfunktionen $\Psi_n(z)$ zu entwickeln:

$$f_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(a)} \Psi_n(z)\,, \qquad f_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} \Psi_n(z)\,. \tag{23}$$

Die *Fourier*-Koeffizienten folgen mit Rücksicht auf die Orthogonalität der Eigenfunktionen zu

$$c_n^{(a)} = \frac{\int_0^l f_a(z)\Psi_n(z)\,dz}{\int_0^l \Psi_n^2(z)\,dz}\,, \qquad c_n^{(i)} = \frac{\int_0^l f_i(z)\,\Psi_n(z)\,dz}{\int_0^l \Psi_n^2(z)\,dz}\,, \tag{24}$$

womit die Entwicklungen (23) als bekannt angesehen werden können. Führt man nun (23) in die Gleichungen (22) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\left(c_1 I_{0n}(r_a) + c_2\omega_{0n} I'_{0n}(r_a)\right) + B_n\left(c_1 K_{0n}(r_a) + c_2\omega_{0n} K'_{0n}(r_a)\right) - c_n^{(a)}\right]\Psi_n(z) = 0\,,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\left(d_1 I_{0n}(r_i) + d_2\omega_{0n} I'_{0n}(r_i)\right) + B_n\left(d_1 K_{0n}(r_i) + d_2\omega_{0n} K'_{0n}(r_i)\right) - c_n^{(i)}\right]\Psi_n(z) = 0\,,
\end{aligned}\right|$$

und diese Beziehungen sind offenbar dann erfüllt, wenn sie für jedes einzelne Reihenglied n bestehen, d. h. wenn die Konstanten A_n und B_n folgendem linearen Gleichungssystem genügen:

$$\left.\begin{aligned} A_n\left(c_1 I_{0n}(r_a) + c_2 \omega_{0n} I'_{0n}(r_a)\right) + B_n\left(c_1 K_{0n}(r_a) + c_2 \omega_{0n} K'_{0n}(r_a)\right) &= c_n^{(a)}, \\ A_n\left(d_1 I_{0n}(r_i) + d_2 \omega_{0n} I'_{0n}(r_i)\right) + B_n\left(d_1 K_{0n}(r_i) + d_2 \omega_{0n} K'_{0n}(r_i)\right) &= c_n^{(i)}. \end{aligned}\right| \tag{25}$$

Hieraus können die A_n und B_n mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n^{(i)} &= -\frac{1}{\Delta_n}\left(c_1 K_{0n}(r_a) + c_2 \omega_{0n} K'_{0n}(r_a)\right), & \alpha_n^{(a)} &= \frac{1}{\Delta_n}\left(d_1 K_{0n}(r_i) + d_2 \omega_{0n} K'_{0n}(r_i)\right), \\ \beta_n^{(i)} &= \frac{1}{\Delta_n}\left(c_1 I_{0n}(r_a) + c_2 \omega_{0n} I'_{0n}(r_a)\right), & \beta_n^{(a)} &= -\frac{1}{\Delta_n}\left(d_1 I_{0n}(r_i) + d_2 \omega_{0n} I'_{0n}(r_i)\right), \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta_n = &\left(c_1 I_{0n}(r_a) + c_2 \omega_{0n} I'_{0n}(r_a)\right)\left(d_1 K_{0n}(r_i) + d_2 \omega_{0n} K'_{0n}(r_i)\right) \\ &- \left(c_1 K_{0n}(r_a) + c_2 \omega_{0n} K'_{0n}(r_a)\right)\left(d_1 I_{0n}(r_i) + d_2 \omega_{0n} I'_{0n}(r_i)\right) \end{aligned}$$

ist in der Form

$$A_n = \alpha_n^{(i)} c_n^{(i)} + \alpha_n^{(a)} c_n^{(a)}, \qquad B_n = \beta_n^{(i)} c_n^{(i)} + \beta_n^{(a)} c_n^{(a)} \tag{27}$$

gewonnen werden, und damit ist die durch (21) gegebene den Randbedingungen (14) und (15) genügende stationäre Temperaturverteilung gefunden:

$$\vartheta_0(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\alpha_n^{(i)} c_n^{(i)} + \alpha_n^{(a)} c_n^{(a)}\right) I_{0n}(r) + \left(\beta_n^{(i)} c_n^{(i)} + \beta_n^{(a)} c_n^{(a)}\right) K_{0n}(r)\right] \Psi'_n(z), \tag{28}$$

oder einfacher mit der Abkürzung

$$\eta_n(r) = \left(\alpha_n^{(i)} c_n^{(i)} + \alpha_n^{(a)} c_n^{(a)}\right) I_{0n}(r) + \left(\beta_n^{(i)} c_n^{(i)} + \beta_n^{(a)} c_n^{(a)}\right) K_{0n}(r): \tag{28a}$$

$$\vartheta_0(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(r) \Psi'_n(z). \tag{28b}$$

5. **Die instationäre Zusatzlösung $\vartheta_1(r, z, t)$. a) Allgemeines. Produktlösung der Wärmeleitungsgleichung.** Die maßgebende Gleichung für das instationäre Temperaturfeld $\vartheta_1(r, z, t)$ ist die Differentialgleichung (1) und wir gewinnen hieraus für die in Produktform darstellbaren Lösungen mit dem Ansatz $\vartheta_1(r, z, t) = R(r)\, Z(z)\, T(t)$ die Beziehung

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = a^2 \frac{T'}{T}, \tag{29}$$

aus der nach Differentiation hinsichtlich t, z bzw. r mit den zunächst willkürlichen Konstanten λ_1 und λ_2 die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{T'}{T} = -\left(\frac{\omega}{a}\right)^2, \qquad \frac{Z''}{Z} = -\lambda_1^2, \qquad \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = -\lambda_2^2, \tag{30}$$

hervorgehen, wobei mit Rücksicht auf (29)

$$\omega^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \tag{31}$$

sein muß. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen lauten

$$T(t) = A_0\, e^{-\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 t}, \quad Z(z) = A_1 \cos \lambda_1 z + B_1 \sin \lambda_1 z, \quad R(r) = A_2 J_0(\lambda_2 r) + B_2 N_0(\lambda_2 r), \tag{32}$$

wobei J_0 bzw. N_0 *Bessel*sche bzw. *Neumann*sche Funktionen Nullter Ordnung bedeuten.

b) Das Randwertproblem des Temperaturfeldes $\vartheta_1(r, z, t)$. Gemäß den Ausführungen in Ziff. **3** wird von der durch (32) gegebenen instationären Zusatzlösung (sofern man noch $A_0 = 1$ setzt, ohne hiermit die Allgemeinheit einzuschränken)

$$\vartheta_1(r, z, t) = R(r)\, Z(z)\, T(t) = e^{-\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 t} \left[A_1 \cos \lambda_1 z + B_1 \sin \lambda_1 z\right]\left[A_2 J_0(\lambda_2 r) + B_2 N_0(\lambda_2 r)\right] \tag{33}$$

verlangt, daß sie bei der nachfolgenden Überlagerung mit der stationären Lösung $\vartheta_0(r, z)$ die bereits durch die stationäre Lösung erfüllten Randbedingungen (14) und (15) nicht mehr verändert.

In diesem Sinne hat man also vo $\vartheta_1(r, z, t)$ die Erfüllung folgender Randbedingungen zu fordern:

$$a_1\,\vartheta_1(r, l, t) + a_2 \left.\frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}\right|_{r,l,t} = 0\,, \qquad b_1\,\vartheta_1(r, 0, t,) + b_2 \left.\frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}\right|_{r,0,t} = 0\,, \tag{34}$$

$$c_1\,\vartheta_1(r_a, z, t) + c_2 \left.\frac{\partial \vartheta_1}{\partial r}\right|_{r_a,z,t} = 0\,, \qquad d_1\,\vartheta_1(r_i, z, t) + d_2 \left.\frac{\partial \vartheta_1}{\partial r}\right|_{r_i,z,t} = 0\,. \tag{35}$$

Diesen kann mit der Lösung (33) genügt werden, wenn folgende Beziehungen bestehen:

$$a_1\,Z(l) + a_2 \left.\frac{dZ}{dz}\right|_{z=l} = 0\,, \qquad b_1\,Z(0) + b_2 \left.\frac{dZ}{dz}\right|_{z=0} = 0\,, \tag{36}$$

$$c_1\,R(r_a) + c_2 \left.\frac{dR}{dr}\right|_{r=r_a} = 0\,, \qquad d_1\,R(r_i) + d_2 \left.\frac{dR}{dr}\right|_{r=r_i} = 0\,, \tag{37}$$

oder, ausgeschrieben (wobei Striche wieder eine Ableitung nach dem Gesamtargument $\lambda_2 r$ bedeuten)

$$\left.\begin{aligned} &A_1\,(a_1 \cos\lambda_1 l - a_2\lambda_1 \sin\lambda_1 l) + B_1\,(a_1 \sin\lambda_1 l + a_2\lambda_1 \cos\lambda_1 l) = 0\,,\\ &A_1\,b_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + B_1\,b_2\lambda_1 = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_2\,(c_1 J_0(\lambda_2 r_a) + c_2\lambda_2 J_0'(\lambda_2 r_a)) + B_2\,(c_1 N_0(\lambda_2 r_a) + c_2\lambda_2 N_0'(\lambda_2 r_a)) = 0\,,\\ &A_2\,(d_1 J_0(\lambda_2 r_i) + d_2\lambda_2 J_0'(\lambda_2 r_i)) + B_2\,(d_1 N_0(\lambda_2 r_i) + d_2\lambda_2 N_0'(\lambda_2 r_i)) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Damit (38) bzw. (39) für von Null verschiedene A_k und B_k $(k = 1, 2)$ erfüllt sind, ist es notwendig, daß die Nennerdeterminanten der Gleichungssysteme (38) und (39) verschwinden, d. h. daß

$$\Delta_1(\lambda_1) = b_2\lambda_1\,(a_1 \cos\lambda_1 l - a_2\lambda_1 \sin\lambda_1 l) - b_1\,(a_1 \sin\lambda_1 l + a_2\lambda_1 \cos\lambda_1 l) = 0$$

bzw.

$$\operatorname{tg}\lambda_1 l = \lambda_1 \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_1 + a_2 b_2 \lambda_1^2} \tag{40}$$

sowie

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2(\lambda_2) = &(c_1 J_0(\lambda_2 r_a) + c_2\lambda_2 J_0'(\lambda_2 r_a))\,(d_1 N_0(\lambda_2 r_i) + d_2\lambda_2 N_0'(\lambda_2 r_i))\\ &- (c_1 N_0(\lambda_2 r_a) + c_2\lambda_2 N_0'(\lambda_2 r_a))\,(d_1 J_0(\lambda_2 r_i) + d_2\lambda_2 J_0'(\lambda_2 r_i)) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

ist. Hieraus sind nunmehr die λ_{1s} $(s = 1, 2, \ldots)$ und λ_{2k} $(k = 1, 2, \ldots)$ ermittelbar. Man erkennt übrigens aus der Gleichheit der Eigenwertgleichungen (18) und (40), daß

$$\lambda_{1s} = \omega_{0s} \tag{42}$$

ist. Aus den Gleichungssystemen (38) und (39) folgt eine Abhängigkeit der Konstanten A_k und B_k in der Form

$$B_1 = -A_1 \frac{a_1 \cos\lambda_1 l - a_2\lambda_1 \sin\lambda_1 l}{a_1 \sin\lambda_1 l + a_2\lambda_1 \cos\lambda_1 l}\,, \qquad B_2 = -A_2 \frac{d_1 J_0(\lambda_2 r_i) + d_2\lambda_2 J_0'(\lambda_2 r_i)}{d_1 N_0(\lambda_2 r_i) + d_2\lambda_2 N_0'(\lambda_2 r_i)}\,,$$

so daß mit den neuen Konstanten

$$C_1 = \frac{A_1}{a_1 \sin\lambda_1 l + a_2\lambda_1 \cos\lambda_1 l}\,, \qquad C_2 = \frac{A_2}{d_1 N_0(\lambda_2 r_i) + d_2\lambda_2 N_0'(\lambda_2 r_i)}\,,$$

für $Z(z)$ und $R(r)$

$$\left.\begin{aligned} Z(z) = C_1\,[&(a_1 \sin\lambda_1 l + a_2\lambda_1 \cos\lambda_1 l) \cos\lambda_1 z\\ &- (a_1 \cos\lambda_1 l - a_2\lambda_1 \sin\lambda_1 l) \sin\lambda_1 z] = C_1\,\Psi(\lambda_1 z)\,, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned} R(r) = C_2\,[&(d_1 N_0(\lambda_2 r_i) + d_2\lambda_2 N_0'(\lambda_2 r_i))\,J_0(\lambda_2 r)\\ &- (d_1 J_0(\lambda_2 r_i) + d_2\lambda_2 J_0'(\lambda_2 r_i))\,N_0(\lambda_2 r)] = C_2\,\Phi_0(\lambda_2 r)\,, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

und damit für das Produkt $R(r)\,Z(z)$ mit der neuen Konstanten $C = C_1\,C_2$

$$R(r)\,Z(z) = C\,\Phi_0(\lambda_2 r)\,\Psi(\lambda_1 z)$$

geschrieben werden kann. Nun erfüllt $R(r)\,Z(z)$ die Randbedingungen (36) und (37) für sämtliche nach (40) bzw. (41) ermittelbaren Eigenwerte, so daß wir den Produktansatz wieder verallge-

meinern können

$$\vartheta_1(r,z,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}C_{k\,s}\,\Phi_0(\lambda_{2\,k}\,r)\,\Psi(\lambda_{1\,s}\,z)\,e^{-\left(\frac{\omega_{k\,s}}{a}\right)^2 t}=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}C_{k\,s}\,\Phi_{0\,k}(r)\,\Psi_s(z)\,e^{-\left(\frac{\omega_{k\,s}}{a}\right)^2 t}\,, \tag{45}$$

wobei nach (31)

$$\omega_{k\,s}^2=\lambda_{1\,s}^2+\lambda_{2\,k}^2 \tag{46}$$

ist. Hier liegt also, ebenfalls wie in Ziff. 4 eine Entwicklung des Temperaturfeldes nach den Eigenfunktionen vor, und die in (45) verbliebenen willkürlichen Konstanten $C_{k\,s}$ sind der bisher noch unberücksichtigt gebliebenen Anfangsbedingung des Problems vorbehalten.

c) Das Anfangswertproblem des Temperaturfeldes $\vartheta_1(r,z,t)$. Wie bereits in Ziff. 3 erwähnt, erfüllt die stationäre Lösung (28) zwar die Randbedingungen (8) und (9), jedoch nicht die Anfangsbedingung (10), und es muß daher von der instationären Zusatzlösung $\vartheta_1(r,z,t)$ verlangt werden, daß sie der Anfangsbedingung

$$\vartheta_1(r,z,0)=-\vartheta_0(r,z) \tag{47}$$

genügt, d. h. zur Zeit $t=0$ gleich der negativen stationären Lösung wird, so daß sich die Wirkungen von $\vartheta_0(r,z)$ und $\vartheta_1(r,z,t)$ zur Zeit $t=0$ in der Tat aufheben. Indem man in (47) die Beziehungen (28b) und (45) einsetzt, erhält man zunächst

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}C_{k\,s}\,\Phi_{0\,k}(r)\right)\Psi_s(z)=-\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s(r)\,\Psi_s(z)\,,$$

woraus für jedes Reihenglied s

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_{k\,s}\,\Phi_{0\,k}(r)=-\eta_s(r) \tag{48}$$

gefolgert werden kann. Beachtet man nun die Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen $\Phi_{0\,k}(r)$

$$\int_{r_i}^{r_a} r\,\Phi_{0\,k}(r)\,\Phi_{0\,i}(r)\,dr=0\quad\text{für } i\neq k\,,\qquad \int_{r_i}^{r_a} r\,\Phi_{0\,k}^2(r)\,dr=\frac{r^2}{2}\left(\Phi_{0\,k}^2+\Phi_{0\,k}'^2\right)\Big|_{r_i}^{r_a}\,, \tag{49}$$

so erhält man schließlich für die in (48) verbliebenen Konstanten $C_{k\,s}$, indem man Gleichung (48) auf beiden Seiten mit $r\,\Phi_{0\,k}(r)$ multipliziert und hernach in den Grenzen $r_i\leq r\leq r_a$ integriert

$$C_{k\,s}=-\frac{2}{\left[r^2(\Phi_{0\,k}^2+\Phi_{0\,k}'^2)\right]_{r_i}^{r_a}}\int_{r_i}^{r_a} r\,\eta_s(r)\,\Phi_{0\,k}(r)\,dr \tag{50}$$

und damit letztlich für die instationäre Zusatzlösung $\vartheta_1(r,z,t)$ aus (45) mit (46) und (50)

$$\vartheta_1(r,z,t)=-2\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\omega_{k\,s}}{a}\right)^2 t}\,\Phi_{0\,k}(r)\,\Psi_s(z)}{\left[r^2(\Phi_{0\,k}^2+\Phi_{0\,k}'^2)\right]_{r_i}^{r_a}}\int_{r_i}^{r_a} r\,\eta_s(r)\,\Phi_{0\,k}(r)\,dr\,. \tag{51}$$

6. Das Temperaturfeld für die Anfangs- und Randbedingungen (8) bis (10). Dieses wird gemäß der vorangegangenen Ausführungen durch Überlagerung der stationären Lösung $\vartheta_0(r,z)$ mit der instationären Zusatzlösung $\vartheta_1(r,z,t)$ gewonnen. Dementsprechend erhält man mit (28) und (51)

$$\vartheta(r,z,t)=\vartheta_0(r,z)+\vartheta_1(r,z,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\left[\eta_s(r)-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\omega_{k\,s}}{a}\right)^2 t}\,\Phi_{0\,k}(r)}{\left[r^2(\Phi_{0\,k}^2+\Phi_{0\,k}'^2)\right]_{r_i}^{r_a}}\int_{r_i}^{r_a} r\,\eta_s(r)\,\Phi_{0\,k}(r)\,dr\right]\Psi_s(z)\,. \tag{52}$$

7. Die allgemeine Lösung für das achsensymmetrische Temperaturfeld nach Maßgabe der Rand- und Anfangsbedingungen (5) bis (7). Für die Bestimmung dieses Temperaturfeldes wird von der Lösung (52) ausgegangen, die man mit $\eta_s^{(i)}(r)=\alpha_s^{(i)}I_{0\,s}(r)+\beta_s^{(i)}K_{0\,s}(r)$

und $\eta_s^{(a)}(r) = \alpha_s^{(a)} I_{0s}(r) + \beta_s^{(a)} K_{0s}(r)$ in der Form

$$\vartheta(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\left[\eta_s^{(i)}(r) - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2 t}\,\Phi_{0k}(r)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\int_{r_i}^{r_a} r\,\eta_s^{(i)}(r)\,\Phi_{0k}(r)\,dr\right] c_s^{(i)}\,\Psi_s(z)$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\left[\eta_s^{(a)}(r) - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2 t}\,\Phi_{0k}(r)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\int_{r_i}^{r_a} r\,\eta_s^{(a)}(r)\,\Phi_{0k}(r)\,dr\right] c_s^{(a)}\,\Psi_s(z) \qquad (53)$$

schreiben kann. Sie charakterisiert ein Temperaturfeld zur Zeit t infolge der zur Zeit $t=0$ einsetzenden und zeitlich konstanten mittels der Funktionen $f_a(z)$ bzw. $f_i(z)$ gekennzeichneten Randwirkungen. Im Falle zeitlich veränderlicher Randwirkungen $\varphi_a(z,t)$ bzw. $\varphi_i(z,t)$ sind nun die *Fourier*-Koeffizienten $c_s^{(a)}$ bzw. $c_s^{(i)}$ nicht mehr konstant, sondern Funktionen der Zeit, was sofort aus den Entwicklungen von $\varphi_a(z,t)$ bzw. $\varphi_i(z,t)$ nach den Eigenfunktionen $\Psi_n(z)$ hervorgeht

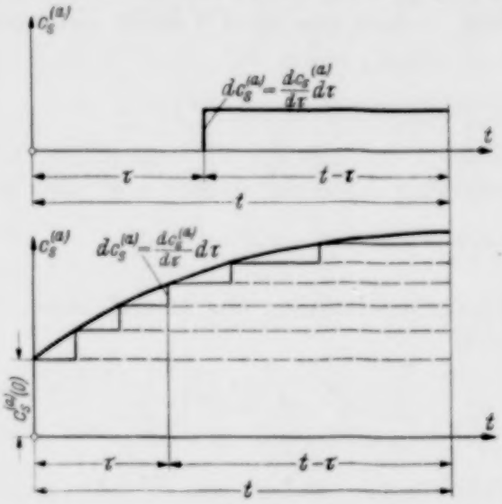

Abb. 1.

$$\varphi_a(z,t) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(a)}\,\Psi_s(z)\,, \quad \varphi_i(z,t) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s^{(i)}\,\Psi_s(z)\,, \qquad (54)$$

$$\left.\begin{aligned} c_s^{(a)} &= \frac{\int_0^l \varphi_a(z,t)\,\Psi_s(z)\,dz}{\int_0^l \Psi_s^2(z)\,dz} = c_s^{(a)}(t)\,,\\ c_s^{(i)} &= \frac{\int_0^l \varphi_i(z,t)\,\Psi_s(z)\,dz}{\int_0^l \Psi_s^2(z)\,dz} = c_s^{(i)}(t)\,, \end{aligned}\right| \qquad (55)$$

und es entstehen nun während eines beliebigen Zeitelementes $d\tau$ die Zusatzwirkungen

$$\partial_t \varphi_a(z,\tau) = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \tau}\,d\tau \quad \text{bzw.} \quad \partial_t \varphi_i(z,\tau) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau}\,d\tau$$

d. h. die Zuwächse

$$dc_s^{(a)} = \frac{dc_s^{(a)}}{d\tau}\,d\tau \quad \text{bzw.} \quad dc_s^{(i)} = \frac{dc_s^{(i)}}{d\tau}\,d\tau\,.$$

Betrachten wir zunächst vereinfachend allein Änderungen am äußeren Rande, und nehmen wir an, daß die zur Zeit τ entstandene Wirkung $dc_s^{(a)}(\tau)$ von nun an zeitlich konstant weiterwirken würde (siehe die obere Figur der Abb. 1), so würde das hierdurch zur Zeit t (nachdem also $t-\tau$ Sekunden nach Einsetzen der Randwirkung $dc_s^{(a)}$ vergangen sind) vorhandene Temperaturfeld mittels der Lösung (53) dadurch erfaßt werden können, daß man in ihr $c_s^{(a)}$ durch $dc_s^{(a)}$ sowie t durch $t-\tau$ ersetzt, und $c_s^{(i)} = 0$ setzt:

$$d\vartheta^{(a)}(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\left[\eta_s^{(a)}(r) - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2 (t-\tau)}\,\Phi_{0k}(r)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\int_{r_i}^{r_a}\eta_s^{(a)}(r)\,r\,\Phi_{0k}(r)\,dr\right]\Psi_s(z)\,\frac{dc_s^{(a)}}{d\tau}\,d\tau\,.$$

Die Gesamtwirkung zur Zeit t kann man sich nun entstanden denken durch die Summation sämtlicher während der einzelnen Zeitintervalle $d\tau$ entstandenen Elementarwirkungen $dc_s^{(a)}$ zuzüglich der Anfangswirkung $c_s^{(a)}(0)$ (Abb. 1), womit man

$$\vartheta^{(a)}(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\left[\eta_s^{(a)}(r) - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2 t}\,\Phi_{0k}(r)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\int_{r_i}^{r_a}\eta_s^{(a)}(r)\,r\,\Phi_{0k}(r)\,dr\right]\Psi_s(z)\,c_s^{(a)}(0)$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^t\left[\eta_s^{(a)}(r) - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2 (t-\tau)}\,\Phi_{0k}(r)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\int_{r_i}^{r_a}\eta_s^{(a)}(r)\,r\,\Phi_{0k}(r)\,dr\right]\Psi_s(z)\,\frac{dc_s^{(a)}}{d\tau}\,d\tau\,,$$

also

$$\vartheta^{(a)}(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\Bigg|\eta_s^{(a)}(r)\,c_s^{(a)}(t)$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi_{0k}(r)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0a}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\left(c_s^{(a)}(0)\,e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2 t}+\int_0^t e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2(t-\tau)}\frac{dc_s^{(a)}}{d\tau}d\tau\right)\int_{r_i}^{r_a}\eta_s^{(a)}(r)\,r\,\Phi_{0k}(r)\,dr\Bigg|\Psi_s(z)$$

erhält. Beachtet man nun noch die Relation

$$c_s^{(a)}(0)\,e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2 t}+\int_0^t e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2(t-\tau)}\frac{dc_s^{(a)}}{d\tau}d\tau = c_s^{(a)}(t)-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2\int_0^t c_s^{(a)}(\tau)\,e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2(t-\tau)}d\tau\,,$$

die sich mittels der partiellen Integrationsregel verifizieren läßt, so folgt

$$\vartheta^{(a)}(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\left[\eta_s^{(a)}(r)-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi_{0k}(r)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\int_{r_i}^{r_a} r\,\eta_s^{(a)}(r)\,\Phi_{0k}(r)\,dr\right]c_s^{(a)}(t)\,\psi_s(z)$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\,\omega_{ks}^2\,\Phi_{0k}(r)\,\Psi_s(z)}{a^2\,[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\int_0^t\int_{r_i}^{r_a}c_s^{(a)}(\tau)\,\eta_s^{(a)}(r)\,r\,\Phi_{0k}(r)\,e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2(t-\tau)}\,dr\,d\tau\,.$$

Nun verschwindet jedoch das erste Glied dieser Formel, da der in diesem auftretende Summenausdruck

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi_{0k}(r)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\int_{r_i}^{r_a} r\,\eta_s^{(a)}(r)\,\Phi_{0k}(r)\,dr$$

gerade die Entwicklung der Funktion $\eta_s^{(a)}(r)$ [vgl. (48) und (50)] nach den Zylinderfunktionen $\Phi_{0k}(r)$ darstellt, und damit verbleibt

$$\vartheta^{(a)}(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\,\omega_{ks}^2\,\Phi_{0k}(r)\,\Psi_s(z)}{a_2\,[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\int_0^t\int_{r_i}^{r_a}c_s^{(a)}(\tau)\,\eta_s^{(a)}(r)\,r\,\Phi_{0k}(r)\,e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2(t-\tau)}\,dr\,d\tau\,.$$

Ersetzen wir in dieser Formel $c_s^a(\tau)$ durch $c_s^{(i)}(\tau)$ sowie $\eta_s^{(a)}(r)$ durch $\eta_s^{(i)}(r)$, so haben wir die Lösung für das Temperaturfeld bei alleiniger Innenrandwirkung, und schließlich gewinnen wir für das Temperaturfeld infolge des Einflusses zeitlich und örtlich beliebig veränderlicher, achsensymmetrischer Randwirkungen an beiden Mantelflächen

$$\vartheta(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\,\omega_{ks}^2\,\Phi_{0k}(r)\,\Psi_s(z)}{a^2\,[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\int_0^t\int_{r_i}^{r_a}[c_s^{(i)}(\tau)\,\eta_s^{(i)}(r)+c_s^{(a)}(\tau)\,\eta_s^{(a)}(r)]\,r\,\Phi_{0k}(r)\,e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2(t-\tau)}\,dr\,d\tau \tag{56}$$

bzw. mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} D_{ks} &= \frac{2\,\omega_{ks}^2}{a^2\,[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}\,,\\ T_{ks}(t) &= \int_0^t\int_{r_i}^{r_a}[c_s^{(i)}(\tau)\,\eta_s^{(i)}(r)+c_s^{(a)}(\tau)\,\eta_s^{(a)}(r)]\,r\,\Phi_{0k}(r)\,e^{-\left(\frac{\omega_{ks}}{a}\right)^2(t-\tau)}\,dr\,d\tau \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

einfach

$$\vartheta(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}D_{ks}\,\Phi_{0k}(r)\,\Psi_s(z)\,T_{ks}(t) \tag{58}$$

III. Der achsensymmetrische Wärmespannungszustand am dicken Kreisrohr. 1. Allgemeines; das thermisch-elastische Verschiebungspotential. Das im Abschnitt II behandelte

achsensymmetrische Temperaturfeld verursacht einen achsensymmetrischen Wärmespannungszustand. Sämtliche Spannungs- und Deformationsgrößen sind somit unabhängig vom Polarwinkel φ, so daß sich die allgemeinen Spannungs- und Deformationsgleichungen bereits erheblich vereinfachen, zumal die Rotationssymmetrie das Verschwinden der Tangentialverschiebungen u, sowie der Schubspannungen $\tau_{r\varphi}$ und $\tau_{\varphi z}$ bedingt (Abb. 2).

Um zu den für die Berechnung des Problems maßgebenden Beziehungen zu gelangen, werden die *Hooke*schen Gesetze sowie die Gleichgewichtsbedingungen am Element herangezogen. Die Massenbeschleunigungen infolge des zeitlich veränderlichen Temperatur- und damit Spannungsfeldes bleiben unberücksichtigt, d. h. es werden zu jedem Zeitaugenblick statische Verhältnisse vorausgesetzt.

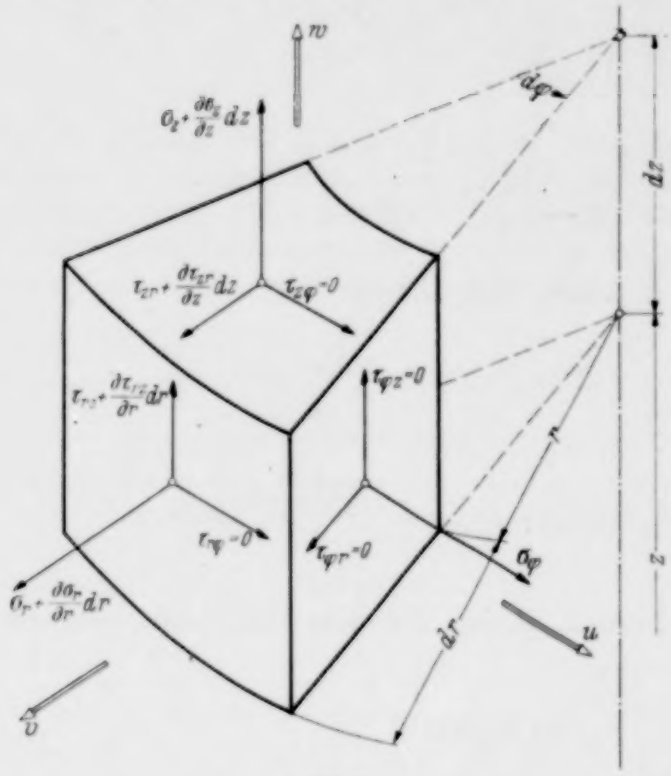

Abb. 2.

Es verbleiben im rotationssymmetrischen Falle die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,\tau_{rz}) - \sigma_\varphi = 0\,, \\ \frac{\partial}{\partial z}(r\,\sigma_z) + \frac{\partial}{\partial r}(r\,\tau_{rz}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

und die thermisch-elastischen Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\,(\sigma_\varphi + \sigma_z)\right] + \alpha_t\,\vartheta\,, \\ \varepsilon_\varphi = \frac{v}{r} = \frac{1}{E}\left[\sigma_\varphi - \nu\,(\sigma_r + \sigma_z)\right] + \alpha_t\,\vartheta\,, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\,(\sigma_r + \sigma_\varphi)\right] + \alpha_t\,\vartheta\,, \\ \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)}{E}\,\tau_{rz}\,, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

wobei α_t den Wärmeausdehnungskoeffizienten bedeutet und mit v bzw. w die Verschiebungen in radialer bzw. axialer Richtung bezeichnet werden. Aus diesen 6 Gleichungen können die 6 Unbekannten $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}$, v und w berechnet werden, wobei hier, entsprechend der geringeren Anzahl unbekannter Verschiebungsgrößen der Weg der Elimination der Spannungen beschritten werden soll. Demgemäß werden mittels der Deformationsgleichungen (60) zunächst die Spannungen in Abhängigkeit von den Verschiebungen dargestellt:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\,\alpha_t\,\vartheta\right], \\ \sigma_\varphi = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{v}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\,\alpha_t\,\vartheta\right], \\ \sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\,\alpha_t\,\vartheta\right], \\ \tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right] \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

und nunmehr in die beiden Gleichgewichtsbedingungen (59) eingesetzt, womit zwei gekoppelte partielle Differentialgleichungen für die Radial- und Axialverschiebungen v und w entstehen:

$$(1-\nu)\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v)\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}\right] - (1+\nu)\,\alpha_t\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0\,, \tag{62}$$

$$(1-\nu)\,\Delta w + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right] - (1+\nu)\,\alpha_t\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0\,. \tag{63}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems wird das thermisch-elastische Verschiebungspotential $F_1(r, z, t)$ eingeführt, das in folgender Form durch seine partiellen Abteilungen definiert wird:

$$v = \frac{\partial F_1}{\partial r}\,, \qquad w = \frac{\partial F_1}{\partial z}\,. \tag{64}$$

Mit diesem Ansatz gehen die beiden Verschiebungsgleichungen in

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\Delta F_1 - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\,\vartheta\right] = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left[\Delta F_1 - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\,\vartheta\right] = 0$$

über, woraus für $F_1(r, z, t)$ die *Poisson*sche Differentialgleichung

$$\Delta F_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\,\vartheta \tag{65}$$

gefolgert werden kann.

Ist zunächst ohne die Berücksichtigung der vorliegenden Randbedingungen ein partikuläres Integral der Gleichung (65) gefunden, so ergeben sich nach (61) und mit Berücksichtigung von (65) folgende, i. allg. den Randbedingungen nicht genügende Wärmespannungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= -\frac{E\,\alpha_t}{1-\nu}\vartheta + \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}\,, \qquad \sigma_\varphi^{(1)} = -\frac{E\,\alpha_t}{1-\nu}\vartheta + \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial F_1}{\partial r}\,,\\ \sigma_z^{(1)} &= -\frac{E\,\alpha_t}{1-\nu}\vartheta + \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\,, \qquad \tau_{rz}^{(1)} = \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 F_1}{\partial r\,\partial z}\,. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

2. Der Randspannungszustand: die *Love*sche Funktion. Da der nach (66) berechenbare Wärmespannungszustand *1* i. allg. die Randbedingungen nicht erfüllt, ist diesem ein zusätzlicher Spannungszustand zu überlagern, der die infolge des Zustandes *1* hervorgerufenen Randspannungen an die tatsächlichen Gegebenheiten anpaßt. Dieser Zusatzspannungszustand rührt also allein von Oberflächenspannungen her und seine weitere Verfolgung ist somit ein reines elastizitätstheoretisches Problem. Die maßgebenden Gleichungen sind demnach durch (59) und (60) bzw. durch (62) und (63) gegeben, sofern man $\vartheta = 0$ setzt. In diesem Falle führt man zur Lösung der Verschiebungsgleichungen (62) und (63) die *Love*sche Verschiebungsfunktion $L(r, z, t)$ ein. Man definiert sie in folgender Form durch ihre partiellen Ableitungen:

$$v = -\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 L}{\partial r\,\partial z}\,, \qquad w = \frac{1}{1-2\nu}\left[2(1-\nu)\,\Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right]. \tag{67}$$

Hiermit kann man die erste Verschiebungsgleichung (62) identisch befriedigen, während aus der zweiten Gleichung (63)

$$\Delta\Delta L = 0 \tag{68}$$

hervorgeht. Sind entsprechende, den Randbedingungen des Problems genügende Lösungen $L_k(r, z, t)$ der Gleichung (68) gefunden, so folgt mit (67) aus (61), worin ebenfalls $\vartheta = 0$ zu setzen ist, für die Spannungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^{(k)} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\,\Delta L_k - \frac{\partial^2 L_k}{\partial r^2}\right),\\ \sigma_\varphi^{(k)} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\,\Delta L_k - \frac{1}{r}\frac{\partial L_k}{\partial r}\right),\\ \sigma_z^{(k)} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\,\Delta L_k - \frac{\partial^2 L_k}{\partial z^2}\right),\\ \tau_{rz}^{(k)} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\,\Delta L_k - \frac{\partial^2 L_k}{\partial z^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

3. Das partikuläre Integral der *Poisson*schen Differentialgleichung. Die Auffindung der partikulären Lösung $F_1(r, z, t)$ wird durch die Struktur der Lösung (58) für das Temperaturfeld außerordentlich vereinfacht. Zerlegt man die Funktion F_1 in die Teilfunktionen F_{1ks} in der Form

$$F_1 = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} F_{1ks}\,, \tag{70}$$

so kann (65) mit (58) auch in der Gestalt

$$\Delta\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} F_{1ks} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} D_{ks}\,\varphi_{0k}(r)\,\Psi_s(z)\,T_{ks}(t) \tag{71}$$

geschrieben werden, und dieses ist immer dann erfüllt, wenn für jedes Glied der Reihe

$$\Delta F_{1ks} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t D_{ks} \Phi_{0k}(r) \Psi_s(z) T_{ks}(t) \tag{72}$$

besteht. Zur Lösung von (72) wird mit der zunächst unbestimmten Konstanten γ_{ks}

$$F_{1ks} = \gamma_{ks} \Phi_{0k}(r) \Psi_s(z) T_{ks}(t) \tag{73}$$

gesetzt, und da für die Zylinderfunktionen $\Phi_{0k}(r) = \Phi_0(\lambda_{2k} r)$ und die trigonometrischen Funktionen $\Psi_s(z) = \Psi(\lambda_{1s} z)$ nach (30) die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\Phi_{0k}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi_{0k}}{dr} = -\lambda_{2k}^2 \Phi_{0k}, \qquad \frac{d^2\Psi_s}{dz^2} = -\lambda_{1s}^2 \Psi_s \tag{74}$$

bestehen, ergibt sich, sofern der Ansatz (73) in (72) eingeführt wird, mit Beachtung von (74) schließlich für die Konstante

$$\gamma_{ks} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \frac{D_{ks}}{\lambda_{1s}^2 + \lambda_{2k}^2} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \frac{D_{ks}}{\omega_{ks}^2}$$

und damit für das partikuläre Integral der *Poisson*schen Gleichung

$$F_1 = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} F_{1ks} = -2\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha_t}{a^2}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi_{0k}(r)\Psi_s(z)T_{ks}(t)}{[r^2(\Phi_{0k}^2 + \Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}. \tag{75}$$

Für die Spannungen erhält man also gemäß (66) mit (58) und (75)

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r,z,t) &= -\frac{2E\alpha_t}{a^2(1-\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(\lambda_{1s}^2+\lambda_{2k}^2)\Phi_{0k}(r) + \lambda_{2k}^2\Phi_{0k}''(r)]\Psi_s(z)T_{ks}(t)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}},\\
\sigma_\varphi^{(1)}(r,z,t) &= -\frac{2E\alpha_t}{a^2(1-\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(\lambda_{1s}^2+\lambda_{2k}^2)\Phi_{0k}(r) + (\lambda_{2k}/r)\Phi_{0k}'(r)]\Psi_s(z)T_{ks}(t)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}},\\
\sigma_z^{(1)}(r,z,t) &= -\frac{2E\alpha_t}{a^2(1-\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2k}^2\Phi_{0k}(r)\Psi_s(z)T_{ks}(t)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}},\\
\tau_{rz}^{(1)}(r,z,t) &= -\frac{2E\alpha_t}{a^2(1-\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{1s}\lambda_{2k}\Phi_{0k}'(r)\Psi_s'(z)T_{ks}(t)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}
\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

und insbesondere für die Oberflächenspannungen

a) an der Außenmantelfläche $r = r_a$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r_a,z,t) &= -\frac{2E\alpha_t}{a^2(1-\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(\lambda_{1s}^2+\lambda_{2k}^2)\Phi_{0k}(r_a) + \lambda_{2k}^2\Phi_{0k}''(r_a)]\Psi_s(z)T_{ks}(t)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}},\\
\tau_{rz}^{(1)}(r_a,z,t) &= -\frac{2E\alpha_t}{a^2(1-\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{1s}\lambda_{2k}\Phi_{0k}'(r_a)\Psi_s'(z)T_{ks}(t)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}},
\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

b) an der Innenmantelfläche $r = r_i$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r_i,z,t) &= -\frac{2E\alpha_t}{a^2(1-\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(\lambda_{1s}^2+\lambda_{2k}^2)\Phi_{0k}(r_i) + \lambda_{2k}^2\Phi_{0k}''(r_i)]\Psi_s(z)T_{ks}(t)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}},\\
\tau_{rz}^{(1)}(r_i,z,t) &= -\frac{2E\alpha_t}{a^2(1-\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{1s}\lambda_{2k}\Phi_{0k}'(r_i)\Psi_s'(z)T_{ks}(t)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}},
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

c) an der Stirnfläche $z = l$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z^{(1)}(r,l,t) &= -\frac{2E\alpha_t}{a^2(1-\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2k}^2\Phi_{0k}(r)\Psi_s(l)T_{ks}(t)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}},\\
\tau_{rz}^{(1)}(r,l,t) &= -\frac{2E\alpha_t}{a^2(1-\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{1s}\lambda_{2k}\Phi_{0k}'(r)\Psi_s'(l)T_{ks}(t)}{[r^2(\Phi_{0k}^2+\Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}},
\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

d) an der Stirnfläche $z = 0$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z^{(1)}(r, 0, t) &= -\frac{2 E \alpha_t}{a^2 (1-\nu)} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2k}^2 \Phi_{0k}(r) \Psi_s(0) T_{ks}(t)}{[r^2 (\Phi_{0k}^2 + \Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}, \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, 0, t) &= -\frac{2 E \alpha_t}{a^2 (1-\nu)} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{1s} \lambda_{2k} \Phi_{0k}'(r) \Psi_s'(0) T_{ks}(t)}{[r^2 (\Phi_{0k}^2 + \Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}}.\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

4. Die Spannungszustände zur Erreichung randspannungsfreier Oberflächen. In den nachfolgenden Untersuchungen wird es sich darum handeln, mit Hilfe bestimmter zu überlagernder Randspannungszustände resultierend einen randspannungsfreien Wärmespannungszustand zu erzeugen, d. h. die durch (77) bis (80) gegebenen Oberflächenspannungen zum Verschwinden zu bringen. Zunächst wird dieses für die Mantelflächen $r = r_i$ bzw. $r = r_a$ durchgeführt.

a) Der Randspannungszustand 2 zur Erreichung randspannungsfreier Mantelflächen $r = r_i$ bzw. $r = r_a$. Die maßgebende Beziehung ist die Differentialgleichung (68) für die *Love*sche Funktion $L_2(r, z, t)$. Zur Lösung von (68) wird zunächst

$$\Delta L_2 = \bar{L}_2(r, z, t) \tag{81}$$

gesetzt, womit Gleichung (68) die Form

$$\Delta \Delta L_2 = \Delta(\Delta L_2) = \Delta \bar{L}_2 = 0 \tag{82}$$

annimmt. Für $\bar{L}_2(r, z, t)$ wird nun ein Produktansatz in der Gestalt

$$\bar{L}_2(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [p_{1ks} I_{0s}(r) + p_{2ks} K_{0s}(r)] \Psi_s'(z) T_{ks}(t) \tag{83}$$

benutzt, wobei p_{1ks} bzw. p_{2ks} willkürliche Konstanten und $\Psi_s'(z)$ die Ableitungen der durch (43) definierten trigonometrischen Funktionen nach ihren Gesamtargumenten $\lambda_{1s} z$ bedeuten. Dieser Ansatz befriedigt wegen

$$\frac{d^2}{dz^2} [\Psi_s'(z)] = -\lambda_{1s}^2 \Psi_s'(z)$$

und

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \lambda_{1s}^2\right) I_{0s}(r) = 0 \,*$$

die Differentialgleichung (82) identisch, was durch Einsetzen verifiziert werden kann, und man hat demnach für die *Love*sche Funktion nach (81) die Differentialgleichung

$$\Delta L_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [p_{1ks} I_{0s}(r) + p_{2ks} K_{0s}(r)] \Psi_s'(z) T_{ks}(t). \tag{84}$$

Zu ihrer Lösung wird mit der noch unbestimmten Funktion $R_{ks}(r)$ der Ansatz

$$L_2(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{2ks}(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} R_{ks}(r) \Psi_s'(z) T_{ks}(t) \tag{85}$$

versucht, und indem man diesen in (84) einsetzt, kann man schließlich für jedes einzelne Reihenglied (k, s)

$$\Delta L_{2ks} = \Delta [R_{ks}(r) \Psi_s'(z) T_{ks}(t)] = [p_{1ks} I_{0s}(r) + p_{2ks} K_{0s}(r)] \Psi_s'(z) T_{ks}(t) \tag{86}$$

folgern. Hieraus erhält man schließlich unter Beachtung von

$$\frac{d^2}{dz^2} [\Psi_s'(z)] = -\lambda_{1s}^2 \Psi_s'(z)$$

folgende gewöhnliche Differentialgleichung für $R_{ks}(r)$:

$$\frac{d^2 R_{ks}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_{ks}}{dr} - \lambda_{1s}^2 R_{ks}(r) = p_{1ks} I_{0s}(r) + p_{2ks} K_{0s}(r). \tag{87}$$

Ihre Lösung setzt sich aus dem aus modifizierten *Bessel*schen Funktionen bestehenden Fundamentalsystem der homogenen Gleichung sowie einer partikulären Lösung der inhomogenen Differential-

* Diese Differentialgleichung wird natürlich auch von $K_{0s}(r)$ erfüllt.

gleichung zusammen. Man erhält schließlich das einfache Resultat

$$R_{ks}(r) = \frac{r}{2\,\lambda_{1s}}\left(p_{1ks}\,I'_{0s}(r) + p_{2ks}\,K'_{0s}(r)\right) + p_{3ks}\,I_{0s}(r) + p_{4ks}\,K_{0s}(r)\,, \tag{88}$$

so daß für die *Lo*resche Funktion nach (85)

$$L_2(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{r}{2\,\lambda_{1s}}\left[p_{1ks}\,I'_{0s}(r) + p_{2ks}\,K'_{0s}(r)\right] + p_{3ks}\,I_{0s}(r) + p_{4ks}\,K_{0s}(r)\right\}\Psi'_s(z)\,T_{ks}(t) \tag{89}$$

gefolgert werden kann. Damit ergeben sich für die Radial- und Schubspannungen nach (69)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r^{(2)} &= \frac{E}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{p_{1ks}\left[\lambda_{1s}\,r\,I'_{0s} + (1-2\,\nu)\,I_{0s}\right]\\ &\quad + p_{2ks}\left[\lambda_{1s}\,r\,K'_{0s} + (1-2\,\nu)\,K_{0s}\right] + 2\,p_{3ks}\,\lambda_{1s}^2\,I''_{0s} + 2\,p_{4ks}\,\lambda_{1s}^2\,K''_{0s}\}\,\lambda_{1s}\,\Psi_s(z)\,T_{ks}(t)\,,\\ \tau_{rz}^{(2)} &= \frac{E}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{p_{1ks}\left[\lambda_{1s}\,r\,I_{0s} + 2\,(1-\nu)\,I'_{0s}\right]\\ &\quad + p_{2ks}\left[\lambda_{1s}\,r\,K_{0s} + 2\,(1-\nu)\,K'_{0s}\right] + 2\,p_{3ks}\,\lambda_{1s}^2\,I'_{0s} + 2\,p_{4ks}\,\lambda_{1s}^2\,K'_{0s}\}\,\lambda_{1s}\,\Psi'_s(z)\,T_{ks}(t)\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

und speziell für die Randspannungen an den Mantelflächen

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r^{(2)}(r_i,z,t) &= \frac{E}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{p_{1ks}\left[\lambda_{1s}\,r_i\,I'_{0s}(r_i) + (1-2\,\nu)\,I_{0s}(r_i)\right]\\ &\quad + p_{2ks}\left[\lambda_{1s}\,r_i\,K'_{0s}(r_i) + (1-2\,\nu)\,K_{0s}(r_i)\right] + 2\,p_{3ks}\,\lambda_{1s}^2\,I''_{0s}(r_i)\\ &\quad + 2\,p_{4ks}\,\lambda_{1s}^2\,K''_{0s}(r_i)\}\,\lambda_{1s}\,\Psi_s(z)\,T_{ks}(t)\,,\\ \tau_{rz}^{(2)}(r_i,z,t) &= \frac{E}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{p_{1ks}\left[\lambda_{1s}\,r_i\,I_{0s}(r_i) + 2\,(1-\nu)\,I'_{0s}(r_i)\right]\\ &\quad + p_{2ks}\left[\lambda_{1s}\,r_i\,K_{0s}(r_i) + 2\,(1-\nu)\,K'_{0s}(r_i)\right] + 2\,p_{3ks}\,\lambda_{1s}^2\,I'_{0s}(r_i)\\ &\quad + 2\,p_{4ks}\,\lambda_{1s}^2\,K'_{0s}(r_i)\}\,\lambda_{1s}\,\Psi'_s(z)\,T_{ks}(t)\,.\end{aligned}\right\} \tag{91}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r^{(2)}(r_a,z,t) &= \frac{E}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{p_{1ks}\left[\lambda_{1s}\,r_a\,I'_{0s}(r_a) + (1-2\,\nu)\,I_{0s}(r_a)\right]\\ &\quad + p_{2ks}\left[\lambda_{1s}\,r_a\,K'_{0s}(r_a) + (1-2\,\nu)\,K_{0s}(r_a)\right] + 2\,p_{3ks}\,\lambda_{1s}^2\,I''_{0s}(r_a)\\ &\quad + 2\,p_{4ks}\,\lambda_{1s}^2\,K''_{0s}(r_a)\}\,\lambda_{1s}\,\Psi_s(z)\,T_{ks}(t)\,,\\ \tau_{rz}^{(2)}(r_a,z,t) &= \frac{E}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{p_{1ks}\left[\lambda_{1s}\,r_a\,I_{0s}(r_a) + 2\,(1-\nu)\,I'_{0s}(r_a)\right]\\ &\quad + p_{2ks}\left[\lambda_{1s}\,r_a\,K_{0s}(r_a) + 2\,(1-\nu)\,K'_{0s}(r_a)\right] + 2\,p_{3ks}\,\lambda_{1s}^2\,I'_{0s}(r_a)\\ &\quad + 2\,p_{4ks}\,\lambda_{1s}^2\,K'_{0s}(r_a)\}\,\lambda_{1s}\,\Psi'_s(z)\,T_{ks}(t)\,.\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Nunmehr können die bisher willkürlichen Konstanten $p_{\mu ks}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) aus der Bedingung der Randspannungsfreiheit der Mantelflächen berechnet werden. Die entsprechenden Randspannungen des Zustandes (2) müssen demnach gleich den negativen Randspannungen des Zustandes (1) sein, also

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r^{(2)}(r_i,z,t) &= -\,\sigma_r^{(1)}(r_i,z,t)\,, \qquad \tau_{rz}^{(2)}(r_i,z,t) = -\,\tau_{rz}^{(1)}(r_i,z,t)\,,\\ \sigma_r^{(2)}(r_a,z,t) &= -\,\sigma_r^{(1)}(r_a,z,t)\,, \qquad \tau_{rz}^{(2)}(r_a,z,t) = -\,\tau_{rz}^{(1)}(r_a,z,t)\,.\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Mit (91) und (92) sowie (77) und (78) entspricht das Gleichungssystem (93), sofern man seine Gültigkeit für jedes einzelne Reihenglied (k, s) fordert, einem linearen Gleichungssystem für die Konstanten $p_{\mu ks}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), aus dem diese ermittelbar sind. Die *Lo*resche Funktion (89) ist damit völlig bestimmt, und mithin sind auch sämtliche Spannungsgrößen des Zustandes *2* gegeben.

Mit den Spannungszuständen *1* und *2* ist allerdings noch nicht die Spannungsfreiheit der Stirnflächen $z = l$ bzw. $z = 0$ erreicht. Hier verbleiben Schub- und Normalspannungen, und von den Schubspannungen kann man, da sie ja an den Mantelflächen bereits zum Verschwinden gebracht worden sind, von vornherein sagen, daß sie für $r = r_i$ bzw. $r = r_a$ Null sein müssen (Abb. 3), so daß sie im Zwischenbereich sicherlich keine großen Werte annehmen können. Da sie darüber hinaus wegen der Rotationssymmetrie des Problems an jedem Rande ein Gleichgewichtssystem bilden,

können sie nach dem *De Saint Venant*schen Prinzip in einiger Entfernung von den Rändern kaum noch einen Einfluß auf den Spannungszustand des Rohres haben. Dasselbe gilt für die Axialspannungen. Da nämlich in den bisherigen Lösungen die Möglichkeit verschiedener wärmetechnischer Gegebenheiten an den beiden Stirnflächen enthalten ist, so ist der Verlauf und die Größe der von den Zuständen *1* und *2* herrührenden Axialspannungen an den beiden Stirnflächen i. allg. sicherlich verschieden, so daß dementsprechend auch zwei voneinander (betrags- und vorzeichenmäßig) verschiedene Axialspannungsresultierenden P_{z0} bzw. P_{zl} erwartet werden könnten (Abb. 4). Nun muß sich jedoch andererseits, da bei den vorangegangenen Betrachtungen in jedem Falle vom Gleichgewichtsprinzip ausgegangen wurde, der Zylinder unter dem Einfluß der Spannungszustände *1* und *2* im Gleichgewicht befinden, und insbesondere fordert die Gleichgewichtsbedingung der axialen Kräfte mit Berücksichtigung der Tatsache randspannungsfreier Mantelflächen

$$P_{zl} - P_{z0} = 0 \,. \tag{94}$$

Dies kann nach dem vorangegangenen nur dann erfüllt sein, sofern $P_{z0} = 0$ und $P_{zl} = 0$, d. h. sofern die Spannungsresultierenden jeweils selbst verschwinden.

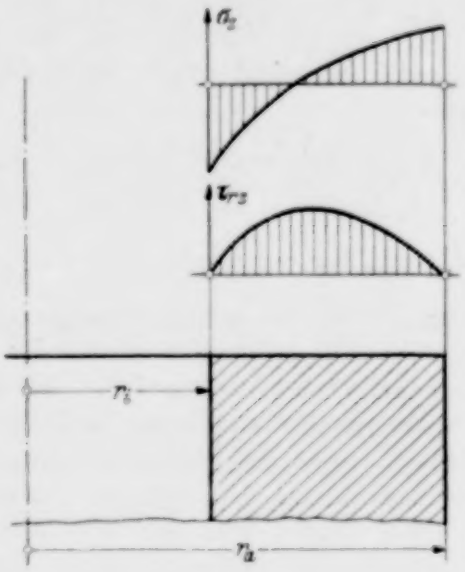

Abb. 3.

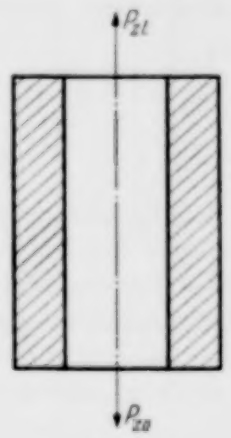

Abb. 4.

Der durch die Spannungszustände *1* und *2* beschriebene Wärmespannungszustand erfaßt dementsprechend bis in die Nähe der Zylinderenden die tatsächlichen Spannungsverhältnisse nahezu exakt, so daß die bisherigen Überlegungen für den Fall nicht zu kurzer Rohre praktisch hinreichend sind. Um jedoch auch noch den Fall sehr kurzer Rohre zu erfassen, sei nachfolgend versucht, den Weg für eine Lösung des Stirnflächen-Randwertproblems aufzuzeigen.

b) Die Randspannungszustände zur Erreichung randspannungsfreier Stirnflächen. α Allgemeines. Wir sehen für das folgende die Spannungen der Zustände *1* und *2* als bekannt an. Sie sind Funktionen des Ortes und der Zeit, wobei der zeitabhängige Teil $T_{ks}(t)$ mit den ortsabhängigen Größen jeweils multiplikativ verbunden ist. Die durch die Zustände *1* und *2* charakterisierten Spannungen können also in folgender Form dargestellt werden [1]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^{(1+2)}(r,z,t) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{r\,ks}^{(1+2)}(r,z)\; T_{ks}(t)\,, \qquad \sigma_\varphi^{(1+2)}(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{\varphi\,ks}^{(1+2)}(r,z)\; T_{ks}(t)\,, \\ \sigma_z^{(1+2)}(r,z,t) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{z\,ks}^{(1+2)}(r,z)\; T_{ks}(t)\,, \qquad \tau^{(1+2)}(r,z,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\tau}_{ks}^{(1+2)}(r,z)\; T_{ks}(t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Speziell erhält man hieraus für die Spannungen an den Stirnflächen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z^{(1+2)}(r,l,t) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{z\,ks}^{(1+2)}(r,l)\; T_{ks}(t)\,, \qquad \tau^{(1+2)}(r,l,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\tau}_{ks}^{(1+2)}(r,l)\; T_{ks}(t)\,, \\ \sigma_z^{(1+2)}(r,0,t) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{z\,ks}^{(1+2)}(r,0)\; T_{ks}(t)\,, \qquad \tau^{(1+2)}(r,0,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\tau}_{ks}^{(1+2)}(r,0)\; T_{ks}(t)\,, \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

und es handelt sich nun um die Aufgabe, einen Randspannungszustand, (d. h. eine *Lo*resche Funktion) aufzufinden, der an den Stirnflächen den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z(r,l,t) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{z\,ks}(r,l)\; T_{ks}(t) = -\,\sigma_z^{(1+2)}(r,l,t) = -\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{z\,ks}^{(1+2)}(r,l)\; T_{ks}(t)\,, \\ \sigma_z(r,0,t) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{z\,ks}(r,0)\; T_{ks}(t) = -\,\sigma_z^{(1+2)}(r,0,t) = -\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{z\,ks}^{(1+2)}(r,0)\; T_{ks}(t)\,, \end{aligned}\right\}$$

[1] Zur Vermeidung unnötig vieler Indizes wird τ anstelle von τ_{rz} geschrieben.

$$\left.\begin{aligned} \tau(r,l,t) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\tau}_{ks}(r,l)\, T_{ks}(t) = -\tau^{(1+2)}(r,l,t) = -\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\tau}_{ks}^{(1+2)}(r,l)\, T_{ks}(t)\,, \\ \tau(r,0,t) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\tau}_{ks}(r,0)\, T_{ks}(t) = -\tau^{(1+2)}(r,0,t) = -\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\tau}_{ks}^{(1+2)}(r,0)\, T_{ks}(t) \end{aligned}\right\} \quad (97)$$

genügt, ohne hierbei jedoch die bereits an den Mantelflächen erfüllten Randbedingungen hinsichtlich der Radial- und Schubspannungen zu verändern. Neben (97) müssen also noch zusätzlich folgende Randbedingungen gefordert werden:

$$\sigma_r(r_a, z, t) = 0\,, \qquad \sigma_r(r_i, z, t) = 0\,, \qquad \tau(r_a, z, t) = 0\,, \qquad \tau(r_i, z, t) = 0\,. \quad (98)$$

Die Bedingungen (97) und (98) sind erfüllt, wenn für jedes einzelne Reihenglied (k, s) folgende Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_{zks}(r,l) &= -\bar{\sigma}_{zks}^{(1+2)}(r,l)\,, \quad \bar{\sigma}_{zks}(r,0) = -\bar{\sigma}_{zks}^{(1+2)}(r,0)\,, \\ \bar{\tau}_{ks}(r,l) &= -\bar{\tau}_{ks}^{(1+2)}(r,l)\,, \quad \bar{\tau}_{ks}(r,0) = -\bar{\tau}_{ks}^{(1+2)}(r,0)\,, \end{aligned}\right\} \quad (99)$$

$$\bar{\sigma}_{rks}(r_a, z) = 0\,, \qquad \bar{\sigma}_{rks}(r_i, z) = 0\,, \qquad \bar{\tau}_{ks}(r_a, z) = 0\,, \qquad \bar{\tau}_{ks}(r_i, z) = 0\,. \quad (100)$$

Wie bereits aus (99) und (100) ersichtlich, separieren wir für das folgende die Zeitfunktionen $T_{ks}(t)$, womit die Aufgabe auf ein Randwertproblem für die quergestrichenen Größen $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$ hinausläuft. Die Untersuchungen beschränken sich auf die Betrachtung eines Reihengliedes (k, s). Die Verallgemeinerung auf sämtliche Reihenglieder bietet keine Schwierigkeit.

Die Ermittlung des Stirnflächen-Randspannungszustandes erfolgt in zwei getrennten Arbeitsgängen, denen zwei voneinander unabhängige *Love*sche Funktionen $L_3(r, z)$ und $L_4(r, z)$ zugrunde liegen. In beiden Fällen werden zunächst die Randbedingungen (100) befriedigt und nach Überlagerung beider Funktionen schließlich auch die Bedingungen (99).

β) Der Randspannungszustand 3. Die maßgebende Gleichung ist die Differentialgleichung (68) und zu ihrer Lösung wird entsprechend Absatz a)

$$\Delta L_{ks}^{(3)} = \bar{L}_{ks}^{(3)} \quad (101)$$

gesetzt, so daß aus (68)

$$\Delta\Delta L_{ks}^{(3)} = \Delta(\Delta L_{ks}^{(3)}) = \Delta \bar{L}_{ks}^{(3)} = 0 \quad (102)$$

hervorgeht. Die Lösung von (102) wird nun jedoch nicht wie in Absatz a) durch modifizierte *Bessel*sche — und trigonometrische Funktionen, sondern durch *Bessel*sche — bzw. *Neumann*sche sowie Exponentialfunktionen dargestellt. Es ist nämlich mit den zunächst willkürlichen Konstanten q_{1n}, q_{2n}, A_n und B_n sowie μ_n

$$\bar{L}_{ks}^{(3)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} [q_{1n} J_0(\mu_n r) + q_{2n} N_0(\mu_n r)] (A_n e^{\mu_n z} + B_n e^{-\mu_n z}) \quad (103)$$

eine Lösung von (102), was durch entsprechendes Einsetzen leicht verifiziert werden kann, und man erhält damit nach (101) folgende Differentialgleichung für die *Love*sche Funktion:

$$\Delta L_{ks}^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} (q_{1n} J_0(\mu_n r) + q_{2n} N_0(\mu_n r)] (A_n e^{\mu_n z} + B_n e^{-\mu_n z})\,. \quad (104)$$

Zu ihrer Lösung wird mit der zunächst willkürlichen Funktion $R_{ksn}(r)$

$$L_{ks}^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} L_{ksn}^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} R_{ksn}(r) (A_n e^{\mu_n z} + B_n e^{-\mu_n z}) \quad (105)$$

gesetzt, womit aus (104) mit $J_0(\mu_n r) = J_{0n}(r)$, $N_0(\mu_n r) = N_{0n}(r)$

$$\Delta \sum_{n=1}^{\infty} R_{ksn}(r) (A_n e^{\mu_n z} + B_n e^{-\mu_n z}) = \sum_{n=1}^{\infty} [q_{1n} J_{0n}(r) + q_{2n} N_{0n}(r)] (A_n e^{\mu_n z} + B_n e^{-\mu_n z}) \quad (106)$$

gefolgert werden kann, und dies ist erfüllt, sofern man das Bestehen dieser Differentialgleichung für jedes einzelne Reihenglied (n) fordert. Es ergibt sich schließlich folgende gewöhnliche Differentialgleichung für $R_{ksn}(r)$:

$$\frac{d^2 R_{ksn}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_{ksn}}{dr} + \mu_n^2 R_{ksn} = q_{1n} J_{0n}(r) + q_{2n} N_{0n}(r)\,, \quad (107)$$

für deren allgemeine Lösung man letztlich nach einiger Rechnung mit den willkürlichen Konstanten $q_{\mu n}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$)

$$R_{k\,n}(r) = -\frac{r}{2\,\mu_n}(q_{1\,n}\,J'_{0\,n} + q_{2\,n}\,N'_{0\,n}) + q_{3\,n}\,J_{0\,n} + q_{4\,n}\,N_{0\,n} \tag{108}$$

erhält. Für die *Love*sche Funktion folgt dann gemäß (105)

$$L^{(3)}_{k\,s} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{r}{2\,\mu_n}(q_{1\,n}\,J'_{0\,n} + q_{2\,n}\,N'_{0\,n}) + q_{3\,n}\,J_{0\,n} + q_{4\,n}\,N_{0\,n}\right](A_n\,e^{\mu_n z} + B_n\,e^{-\mu_n z}) \tag{109}$$

und für die zugehörigen Radial- bzw. Schubspannungen gemäß (69)

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}^{(3)}_{r\,k\,s} = &-\frac{E}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}\{q_{1\,n}\,[\mu_n\,r\,J'_{0\,n} + (1-2\,\nu)\,J_{0\,n}] + q_{2\,n}\,[\mu_n\,r\,N'_{0\,n}\\ &+ (1-2\,\nu)\,N_{0\,n}] + 2\,q_{3\,n}\,\mu_n^2\,J''_{0\,n} + 2\,q_{4\,n}\,\mu_n^2\,N''_{0\,n}\}\,\mu_n\,(A_n\,e^{\mu_n z} - B_n\,e^{-\mu_n z})\,,\\ \bar{\tau}^{(3)}_{k\,s} = &-\frac{E}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\{q_{1\,n}\,[\mu_n\,r\,J_{0\,n} - 2\,(1-\nu)\,J'_{0\,n}] + q_{2\,n}\,[\mu_n\,r\,N_{0\,n}\\ &- 2\,(1-\nu)\,N'_{0\,n}] + 2\,q_{3\,n}\,\mu_n^2\,J'_{0\,n} + 2\,q_{4\,n}\,\mu_n^2\,N'_{0\,n}\}\,\mu_n\,(A_n\,e^{\mu_n z} + B_n\,e^{-\mu_n z})\,.\end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Die Randbedingungen (100) werden von diesen Spannungen auf jeden Fall dann erfüllt, wenn ihnen jedes einzelne Glied der in (110) vorhandenen Reihenentwicklungen genügt, und hieraus folgern wir folgendes lineares homogenes Gleichungssystem für die $q_{\mu n}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$):

$$\left.\begin{aligned}&\{q_{1\,n}\,[\mu_n\,r\,J'_{0\,n} + (1-2\,\nu)\,J_{0\,n}] + q_{2\,n}\,[\mu_n\,r\,N'_{0\,n} + (1-2\,\nu)\,N_{0\,n}]\\ &\qquad + 2\,q_{3\,n}\,\mu_n^2\,J''_{0\,n} + 2\,q_{4\,n}\,\mu_n^2\,N''_{0\,n}\}_{r=r_i} = 0\,,\\ &\{q_{1\,n}\,[\mu_n\,r\,J'_{0\,n} + (1-2\,\nu)\,J_{0\,n}] + q_{2\,n}\,[\mu_n\,r\,N'_{0\,n} + (1-2\,\nu)\,N_{0\,n}]\\ &\qquad + 2\,q_{3\,n}\,\mu_n^2\,J''_{0\,n} + 2\,q_{4\,n}\,\mu_n^2\,N''_{0\,n}\}_{r=r_a} = 0\,,\\ &\{q_{1\,n}\,[\mu_n\,r\,J_{0\,n} - 2\,(1-\nu)\,J'_{0\,n}] + q_{2\,n}\,[\mu_n\,r\,N_{0\,n} - 2\,(1-\nu)\,N'_{0\,n}]\\ &\qquad + 2\,q_{3\,n}\,\mu_n^2\,J'_{0\,n} + 2\,q_{4\,n}\,\mu_n^2\,N'_{0\,n}\}_{r=r_i} = 0\,,\\ &\{q_{1\,n}\,[\mu_n\,r\,J_{0\,n} - 2\,(1-\nu)\,J'_{0\,n}] + q_{2\,n}\,[\mu_n\,r\,N_{0\,n} - 2\,(1-\nu)\,N'_{0\,n}]\\ &\qquad + 2\,q_{3\,n}\,\mu_n^2\,J'_{0\,n} + 2\,q_{4\,n}\,\mu_n^2\,N'_{0\,n}\}_{r=r_a} = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{111}$$

dessen Nennerdeterminante Null sein muß, damit wir von Null verschiedene Werte $q_{\mu n}$ erwarten können. Also ist

$$\Delta(\mu) = 0 \tag{112}$$

die Eigenwertgleichung zur Berechnung der μ_n ($n = 1, 2, 3 \ldots$), die wir für das folgende als bekannt voraussetzen wollen.

Allerdings hat das notwendige Verschwinden der Nennerdeterminante gemäß (112) eine lineare Abhängigkeit dreier Konstanten (Beispielsweise $q_{2\,n}$, $q_{3\,n}$ und $q_{4\,n}$) von der vierten, willkürlich wählbaren Konstanten (z. B. $q_{1\,n}$) in der Form

$$q_{k\,n} = q_{1\,n}\,\delta^{(n)}_{1\,k} \tag{113}$$

zur Folge, wobei $\delta^{(n)}_{1\,k}$ eine aus den Koeffizienten des Gleichungssystems (111) bestehende Konstante bedeutet, so daß anstelle der bisher zur Verfügung stehenden vier Konstanten $q_{\mu n}$ nunmehr nur noch eine willkürlich wählbare Konstante verbleibt. Da in dem von z abhängigen Teil der *Love*schen Funktion noch zwei willkürliche Konstanten (A_n und B_n) enthalten sind, diese jedoch letztlich multiplikativ mit der Konstanten $q_{1\,n}$ zusammenhängen, verbleiben effektiv in der *Love*schen Funktion (109) je Reihenglied nur zwei willkürliche Konstanten, und man ist somit nur in der Lage, zwei der insgesamt vier Spannungsrandbedingungen hinsichtlich der Stirnflächen zu befriedigen. Es muß daher nach einer weiteren *Love*schen Funktion $L^{(4)}_{k\,s}(r, z)$ gesucht werden, die nun auch noch die restlichen willkürlichen Integrationskonstanten liefert.

Bevor jedoch dazu übergegangen wird, seien zunächst noch die der *Love*schen Funktion (109) gemäß (69) mit Beachtung von (113) entsprechenden Axial- und Schubspannungen niedergeschrieben. Es folgen schließlich mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}&\frac{E\,\mu_n}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\{\mu_n\,r\,J'_{0\,n} + 2\,(2-\nu)\,J_{0\,n} + \delta^{(n)}_{12}\,[\mu_n\,r\,N'_{0\,n} + 2\,(2-\nu)\,N_{0\,n}]\\ &\qquad - 2\,\delta^{(n)}_{13}\,\mu_n^2\,J_{0\,n} - 2\,\delta^{(n)}_{14}\,\mu_n^2\,N_{0\,n}\} = f_n(r)\,,\end{aligned}\right.$$

$$-\frac{E\,\mu_n}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\{\mu_n\,r\,J_{0n}-2\,(1-\nu)\,J'_{0n}+\delta_{12}^{(n)}\,[\mu_n\,r\,N_{0n}-2\,(1-\nu)\,N'_{0n}]+2\,\delta_{13}^{(n)}\,\mu_n^2\,J'_{0n}+2\,\delta_{14}^{(n)}\,\mu_n^2\,N'_{0n}\}=g_n(r)\,,$$

$$q_{1n}\,A_n=\varkappa_{An}^{(k,s)}\,,\qquad q_{1n}\,B_n=\varkappa_{Bn}^{(k,s)} \tag{114}$$

die Spannungen

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_{z\,ks}^{(3)}(r,z)&=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(r)\,(\varkappa_{An}^{(k,s)}\,e^{\mu_n z}-\varkappa_{Bn}^{(k,s)}\,e^{-\mu_n z})\,,\\ \bar{\tau}_{ks}^{(3)}(r,z)&=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(r)\,(\varkappa_{An}^{(k,s)}\,e^{\mu_n z}+\varkappa_{Bn}^{(k,s)}\,e^{-\mu_n z})\,.\end{aligned}\right\} \tag{115}$$

Aus (115) ist die bereits erwähnte Schwierigkeit hinsichtlich der Konstanten sofort zu erkennen. Sie sind für die Befriedigung der vier Randbedingungen (99) nicht hinreichend. Nachfolgend wird daher eine weitere *Love*sche Funktion ermittelt.

γ) **Der Randspannungszustand 4.** Analog den Ausführungen in Absatz a) betrachten wir nun noch einmal eine aus modifizierten *Bessel*schen Funktionen und trigonometrischen Funktionen bestehende Produktlösung. Entsprechend (89) ist also mit den willkürlichen Konstanten ϱ_{mn} $(m=1,2,3,4)$, $\bar{A}_n$, $\bar{B}_n$ und $\bar{\mu}_n$, sofern man noch zur Abkürzung $I_0(\bar{\mu}_n r)=I_{0n}(r)$ und $K_0(\bar{\mu}_n r)=K_{0n}$ schreibt,

$$L_{ks}^{(4)}(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{r}{2\,\bar{\mu}_n}\,[\varrho_{1n}\,I'_{0n}+\varrho_{2n}\,K'_{0n}]+\varrho_{3n}\,I_{0n}+\varrho_{4n}\,K_{0n}\right\}(\bar{A}_n\sin\bar{\mu}_n z+\bar{B}_n\cos\bar{\mu}_n z) \tag{116}$$

ebenfalls eine Produktlösung der Gleichung (68), und für die Radial- und Schubspannungen ergeben sich schließlich mit (116) gemäß (69) die Werte

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_{rks}^{(4)}&=\frac{E}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}\{\varrho_{1n}\,[\bar{\mu}_n\,r\,I'_{0n}+(1-2\,\nu)\,I_{0n}]+\varrho_{2n}\,[\bar{\mu}\,r\,K'_{0n}+(1-2\,\nu)\,K_{0n}]\\&\qquad+2\,\varrho_{3n}\,\bar{\mu}_n^2\,I''_{0n}+2\,\varrho_{4n}\,\bar{\mu}_n^2\,K''_{0n}\}\,\bar{\mu}_n\,(\bar{A}_n\cos\bar{\mu}_n z-\bar{B}_n\sin\bar{\mu}_n z)\,,\\ \bar{\tau}_{ks}^{(4)}&=\frac{E}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}\{\varrho_{1n}\,[\bar{\mu}_n\,r\,I_{0n}+2\,(1-\nu)\,I'_{0n}]+\varrho_{2n}\,[\bar{\mu}_n\,r\,K_{0n}+2\,(1-\nu)\,K'_{0n}]\\&\qquad+2\,\varrho_{3n}\,\bar{\mu}_n^2\,I'_{0n}+2\,\varrho_{4n}\,\bar{\mu}_n^2\,K'_{0n}\}\,\bar{\mu}_n\,(\bar{A}_n\sin\bar{\mu}_n z+\bar{B}_n\cos\bar{\mu}_n z)\,.\end{aligned}\right\} \tag{117}$$

Die Befriedigung der Mantelflächen-Randbedingungen (100) ist mit (117) auf jeden Fall dann gewährleistet, wenn für jedes Glied (n) der in (117) auftretenden Reihenentwicklungen folgende Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned}&\{\varrho_{1n}\,[\bar{\mu}_n\,r\,I'_{0n}+(1-2\,\nu)\,I_{0n}]+\varrho_{2n}\,[\bar{\mu}_n\,r\,K'_{0n}+(1-2\,\nu)\,K_{0n}]+2\,\varrho_{3n}\,\bar{\mu}_n^2\,I''_{0n}+2\,\varrho_{4n}\,\bar{\mu}_n^2\,K''_{0n}\}_{r=r_i}=0\,,\\&\{\varrho_{1n}\,[\bar{\mu}_n\,r\,I'_{0n}+(1-2\,\nu)\,I_{0n}]+\varrho_{2n}\,[\bar{\mu}_n\,r\,K'_{0n}+(1-2\,\nu)\,K_{0n}]+2\,\varrho_{3n}\,\bar{\mu}_n^2\,I''_{0n}+2\,\varrho_{4n}\,\bar{\mu}_n^2\,K''_{0n}\}_{r=r_a}=0\,,\\&\{\varrho_{1n}\,[\bar{\mu}_n\,r\,I_{0n}+2\,(1-\nu)\,I'_{0n}]+\varrho_{2n}\,[\bar{\mu}_n\,r\,K_{0n}+2\,(1-\nu)\,K'_{0n}]+2\,\varrho_{3n}\,\bar{\mu}_n^2\,I'_{0n}+2\,\varrho_{4n}\,\bar{\mu}_n^2\,K'_{0n}\}_{r=r_i}=0\,,\\&\{\varrho_{1n}\,[\bar{\mu}_n\,r\,I_{0n}+2\,(1-\nu)\,I'_{0n}]+\varrho_{2n}\,[\bar{\mu}_n\,r\,K_{0n}+2\,(1-\nu)\,K'_{0n}]+2\,\varrho_{3n}\,\bar{\mu}_n^2\,I'_{0n}+2\,\varrho_{4n}\,\bar{\mu}_n^2\,K'_{0n}\}_{r=r_a}=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Aus diesem linearen homogenen Gleichungssystem hinsichtlich der Konstanten ϱ_{in} $(i=1,2,3,4)$ können diese nur dann als verschieden von Null hervorgehen, sofern die Nennerdeterminante des Systems (118) verschwindet. Also ist

$$\Delta(\bar{\mu})=0 \tag{119}$$

die Eigenwertgleichung zur Bestimmung der $\bar{\mu}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$, und das Verschwinden der Nennerdeterminante bedingt nun wieder eine lineare Abhängigkeit dreier Konstanten von der vierten willkürlich wählbaren Konstanten beispielsweise in der Form

$$\varrho_{kn}=\varrho_{1n}\,\bar{\delta}_{1k}^{(n)}\,. \tag{120}$$

Die der *Love*schen Funktion (116) gemäß (69) entsprechenden Axial- und Schubspannungen erhält man dann schließlich unter Beachtung von (120) mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{E\,\bar{\mu}_n}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\{\bar{\mu}_n\,r\,I'_{0n}+2\,(2-\nu)\,I_{0n}+\bar{\delta}^{(n)}_{12}\,[\bar{\mu}_n\,r\,K'_{0n}+2\,(2-\nu)\,K_{0n}]\\
&\qquad\qquad+2\,\bar{\delta}^{(n)}_{13}\,\bar{\mu}_n^2\,I_{0n}+2\,\bar{\delta}^{(n)}_{14}\,\bar{\mu}_n^2\,K_{0n}=\bar{f}_n(r)\,,\\
&\frac{E\,\bar{\mu}_n}{2\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\{\bar{\mu}_n\,r\,I_{0n}+2\,(1-\nu)\,I'_{0n}+\bar{\delta}^{(n)}_{12}\,[\bar{\mu}_n\,r\,K_{0n}+2\,(1-\nu)\,K'_{0n}]\\
&\qquad\qquad+2\,\bar{\delta}^{(n)}_{13}\,\bar{\mu}_n^2\,I'_{0n}+2\,\bar{\delta}^{(n)}_{14}\,\bar{\mu}_n^2\,K'_{0n}=\bar{g}_n(r)\,,\\
&\varrho_{1n}\,\bar{A}_n=\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{An}\,,\qquad \varrho_{1n}\,\bar{B}_n=\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{Bn}
\end{aligned}\right\}\tag{121}$$

nach einiger Rechnung zu

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\sigma}^{(4)}_{z\,k\,s}(r,z)&=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_n(r)\,(\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{An}\cos\bar{\mu}_n\,z-\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{Bn}\sin\bar{\mu}_n\,z)\,,\\
\bar{\tau}^{(4)}_{k\,s}(r,z)&=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{g}_n(r)\,(\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{An}\sin\bar{\mu}_n\,z+\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{Bn}\cos\bar{\mu}_n\,z)\,.
\end{aligned}\right\}\tag{122}$$

δ) **Ermittlung der Konstanten $\varkappa$ aus den Randbedingungen (99).** Überlagern wir die beiden *Love*schen Funktionen $L^{(3)}_{k\,s}$ und $L^{(4)}_{k\,s}$, so sind in den zugehörigen Beziehungen für die Axial- und Schubspannungen

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{z\,k\,s}&=\bar{\sigma}^{(3)}_{z\,k\,s}+\bar{\sigma}^{(4)}_{z\,k\,s}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(r)\,(\varkappa^{(k,s)}_{An}\,e^{\mu_n z}-\varkappa^{(k,s)}_{Bn}\,e^{-\mu_n z})\\
&\qquad+\bar{f}_n(r)\,(\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{An}\cos\bar{\mu}_n\,z-\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{Bn}\sin\bar{\mu}_n\,z)\,,\\
\bar{\tau}_{k\,s}&=\bar{\tau}^{(3)}_{k\,s}+\bar{\tau}^{(4)}_{k\,s}=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(r)\,(\varkappa^{(k,s)}_{An}\,e^{\mu_n z}+\varkappa^{(k,s)}_{Bn}\,e^{-\mu_n z})\\
&\qquad+\bar{g}_n(r)\,(\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{An}\sin\bar{\mu}_n\,z+\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{Bn}\cos\bar{\mu}_n\,z)
\end{aligned}\right\}\tag{123}$$

genügend willkürliche Konstanten $\varkappa^{(k,s)}_{An}$, $\varkappa^{(k,s)}_{Bn}$, $\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{An}$ und $\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{Bn}$ enthalten, um die Spannungsrandbedingungen an den Stirnflächen zu befriedigen. Man erhält zunächst aus (123) für die Randspannungen

a) an der Stirnfläche $z=0$

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{z\,k\,s}(r,0)&=\sum_{n=1}^{\infty}[\varkappa^{(k,s)}_{An}-\varkappa^{(k,s)}_{Bn}]\,f_n(r)+\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{An}\,\bar{f}_n(r)\,,\\
\bar{\tau}_{k\,s}(r,0)&=\sum_{n=1}^{\infty}[\varkappa^{(k,s)}_{An}+\varkappa^{(k,s)}_{Bn}]\,g_n(r)+\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{Bn}\,\bar{g}_n(r)\,.
\end{aligned}\right\}\tag{124}$$

b) an der Stirnfläche $z=l$

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{z\,k\,s}(r,l)&=\sum_{n=1}^{\infty}[\varkappa^{(k,s)}_{An}\,e^{\mu_n l}-\varkappa^{(k,s)}_{Bn}\,e^{-\mu_n l}]\,f_n(r)+[\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{An}\cos\bar{\mu}_n\,l-\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{Bn}\sin\bar{\mu}_n\,l]\,\bar{f}_n(r)\,,\\
\bar{\tau}_{k\,s}(r,l)&=\sum_{n=1}^{\infty}[\varkappa^{(k,s)}_{An}\,e^{\mu_n l}+\varkappa^{(k,s)}_{Bn}\,e^{-\mu_n l}]\,g_n(r)+[\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{An}\sin\bar{\mu}_n\,l+\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{Bn}\cos\bar{\mu}_n\,l]\,\bar{g}_n(r)\,,
\end{aligned}\right\}\tag{125}$$

und damit ergibt sich, sofern man noch

$$c^{(k,s)}_{1n}=\varkappa^{(k,s)}_{An}-\varkappa^{(k,s)}_{Bn}\,,\qquad \bar{c}^{(k,s)}_{1n}=\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{An}\,,\qquad c^{(k,s)}_{n}=\varkappa^{(k,s)}_{An}+\varkappa^{(k,s)}_{Bn}\,,\qquad \bar{c}^{(k,s)}_{2n}=\bar{\varkappa}^{(k,s)}_{Bn}\tag{126}$$

setzt, aus den Randbedingungen (99) folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}c^{(k,s)}_{1n}\,f_n(r)+\bar{c}^{(k,s)}_{1n}\,\bar{f}_n(r)=-\bar{\sigma}^{(1+2)}_{z\,k\,s}(r,0)\,,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}c^{(k,s)}_{2n}\,g_n(r)+\bar{c}^{(k,s)}_{2n}\,\bar{g}_n(r)=-\bar{\tau}^{(1+2)}_{k\,s}(r,0)\,,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}[c^{(k,s)}_{1n}\,\mathfrak{Cof}\,\mu_n\,l+c^{(k,s)}_{2n}\,\mathfrak{Sin}\,\mu_n\,l]\,f_n(r)+[\bar{c}^{(k,s)}_{1n}\cos\bar{\mu}_n\,l-\bar{c}^{(k,s)}_{2n}\sin\bar{\mu}_n\,l]\,\bar{f}_n(r)=-\bar{\sigma}^{(1+2)}_{z\,k\,s}(r,l)\,,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}[c^{(k,s)}_{1n}\,\mathfrak{Sin}\,\mu_n\,l+c^{(k,s)}_{2n}\,\mathfrak{Cof}\,\mu_n\,l]\,g_n(r)+[\bar{c}^{(k,s)}_{1n}\sin\bar{\mu}_n\,l+\bar{c}^{(k,s)}_{2n}\cos\bar{\mu}_n l]\,\bar{g}_n(r)=-\bar{\tau}^{(1+2)}_{k\,s}(r,l)\,.
\end{aligned}\right\}\tag{127}$$

Man bildet zunächst aus den beiden ersten Gleichungen von (127)

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}^{(k,s)} f_n(r) &= -\left[\bar{\sigma}_{zks}^{(1+2)}(r,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{1n}^{(k,s)} \bar{f}_n(r)\right] = -R_1^{(k,s)}(r)\,, \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}^{(k,s)} g_n(r) &= -\left[\tau_{ks}^{(1+2)}(r,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{2n}^{(k,s)} \bar{g}_n(r)\right] = -R_2^{(k,s)}(r) \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

und bestimmt nun die $c_{1n}^{(k,s)}$ und $c_{2n}^{(k,s)}$ wie bei der Entwicklung einer *Fourier*reihe aus der Bedingung, daß die Integrale der Fehlerquadrate minimal sein sollen. Man fordert somit

$$\left.\begin{aligned} F_1^{(k,s)} &= \int_{r_i}^{r_a} \left[R_1^{(k,s)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}^{(k,s)} f_n(r)\right]^2 dr \to \text{Min}\,, \\ F_2^{(k,s)} &= \int_{r_i}^{r_a} \left[R_2^{(k,s)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}^{(k,s)} g_n(r)\right]^2 dr \to \text{Min}\,. \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial F_1^{(k,s)}}{\partial c_{1i}^{(k,s)}} &= 0 \Big|_{i=1\ldots\infty}\,, \\ \frac{\partial F_2^{(k,s)}}{\partial c_{2i}^{(k,s)}} &= 0 \Big|_{i=1\ldots\infty}\,, \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

und dies entspricht folgenden zweimal unendlich vielen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}^{(k,s)} \int_{r_i}^{r_a} f_n(r) f_i(r)\, dr + \int_{r_i}^{r_a} R_1^{(k,s)}(r) f_i(r)\, dr &= 0 \Big|_{i=1\ldots\infty}\,, \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}^{(k,s)} \int_{r_i}^{r_a} g_n(r) g_i(r)\, dr + \int_{r_i}^{r_a} R_2^{(k,s)}(r) g_i(r)\, dr &= 0 \Big|_{i=1\ldots\infty}\,, \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

bzw., wenn man hierin noch die Funktionen $R_1^{(k,s)}(r)$ und $R_2^{(k,s)}(r)$ gemäß (128) durch die ursprünglichen Größen ausdrückt,

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{1n}^{(k,s)} \int_{r_i}^{r_a} f_n(r) f_i(r)\, dr + \bar{c}_{1n}^{(k,s)} \int_{r_i}^{r_a} \bar{f}_n(r) f_i(r)\, dr\right] + \int_{r_i}^{r_a} \bar{\sigma}_{zks}^{(1+2)}(r,0) f_i(r)\, dr &= 0 \Big|_{i=1\ldots\infty}\,, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{2n}^{(k,s)} \int_{r_i}^{r_a} g_n(r) g_i(r)\, dr + \bar{c}_{2n}^{(k,s)} \int_{r_i}^{r_a} \bar{g}_n(r) g_i(r)\, dr\right] + \int_{r_i}^{r_a} \bar{\tau}_{ks}^{(1+2)}(r,0) g_i(r)\, dr &= 0 \Big|_{i=1\ldots\infty}\,. \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

Aus diesen zweimal unendlich vielen linearen Gleichungen für die viermal unendlich vielen Unbekannten $c_{1n}^{(k,s)}$, $c_{2n}^{(k,s)}$, $\bar{c}_{1n}^{(k,s)}$ und $\bar{c}_{2n}^{(k,s)}$ $(n = 1, 2\ldots)$ können die Unbekannten $c_{1n}^{(k,s)}$ und $c_{2n}^{(k,s)}$ $(n = 1, 2\ldots)$ durch die Unbekannten $\bar{c}_{1n}^{(k,s)}$ und $\bar{c}_{2n}^{(k,s)}$ $(n = 1, 2\ldots)$ ausgedrückt und damit in den beiden letzten Gleichungen von (127) ersetzt werden, so daß in diesen nur noch die $\bar{c}_{1n}^{(k,s)}$ und $\bar{c}_{2n}^{(k,s)}$ $(n = 1, 2\ldots)$ verbleiben. Auch hier ist man dann in entsprechender Weise mittels der Fehlerquadratmethode in der Lage, die $\bar{c}_{1n}^{(k,s)}$ und $\bar{c}_{2n}^{(k,s)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ zu ermitteln. Sind diese bekannt, so können nunmehr rückwärtig die Konstanten $c_{1n}^{(k,s)}$ und $c_{2n}^{(k,s)}$ aus (131) berechnet werden, und mit diesen lassen sich gemäß (126) die ursprünglichen Konstanten $\varkappa_{An}^{(k,s)}$, $\varkappa_{Bn}^{(k,s)}$, $\bar{\varkappa}_{An}^{(k,s)}$ und $\bar{\varkappa}_{Bn}^{(k,s)}$ $(n = 1, 2\ldots)$ bestimmen. Die *Love*schen Funktionen $L_{ks}^{(3)}$ und $L_{ks}^{(4)}$, d. h. der Randspannungszustand zur Erreichung randspannungsfreier Stirnflächen sind damit vollständig bestimmt, wenn wir noch sämtliche Teilspannungszustände, d. h. sämtliche *Love*schen Funktionen L_{ks} aufsummieren:

$$L = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_{ks}^{(3)} + L_{ks}^{(4)}\right). \tag{132}$$

IV. Ebene Probleme. 1. Allgemeine Lösung für das ebene achsensymmetrische Temperaturfeld. Die entsprechenden Beziehungen des Abschnittes II vereinfachen sich erheblich, wenn das Temperaturfeld unabhängig von z wird, was beispielsweise im mittleren Bereich eines sehr langen Rohres mit von z unabhängigen thermischen Randwirkungen $\varphi_a(t)$ bzw. $\varphi_i(t)$ der Fall ist. Wir erhalten hierfür mit $\lambda_{1s} = 0$ $(s = 2, 3\ldots)$ und dem Grenzübergang $\lambda_{11} \to 0$ schließlich mit den Abkürzungen

$$\eta_j(r,t) = \frac{\varphi_i(t)\left(c_1 \ln \frac{r_a}{r} + \frac{c_2}{r_a}\right) - \varphi_a(t)\left(d_1 \ln \frac{r_i}{r} + \frac{d_2}{r_i}\right)}{c_1 d_1 \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{c_2 d_1}{r_a} - \frac{c_1 d_2}{r_i}} \tag{133}$$

für das Temperaturfeld

$$\vartheta(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,\Phi_{0k}(r)\,\omega_k^2}{a^2\,[r^2(\Phi_{0k}^2 + \Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}} \int_0^t \int_{r_i}^{r_a} \eta_j(r,\tau)\, r\, \Phi_{0k}(r)\, e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 (t-\tau)}\, dr\, d\tau\,, \tag{134}$$

wobei die Werte $\lambda_{2k} = \omega_k$ durch (41) definiert sind. Analog (5) bis (7) genügt diese Lösung folgenden Rand- und Anfangsbedingungen:

$$c_1\,\vartheta(r_a, t) + c_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\bigg|_{r_a, t} = q_a(t)\,, \qquad d_1\,\vartheta(r_i, t) + d_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\bigg|_{r_i, t} = q_i(t)\,, \qquad \vartheta(r, 0) = 0\,. \tag{135}$$

2. Wärmespannungen im mittleren Bereich eines sehr langen Rohres infolge eines ebenen Temperaturfeldes. Sämtliche Spannungsgrößen sowie die Radialverschiebungen v (Abb. 2) müssen in diesem Falle von z unabhängig sein. Hieraus folgert man schließlich aus den allgemeinen Beziehungen (59) bis (63)

1) das Verschwinden der Schubspannungen τ_{rz},

2) ein Ebenbleiben der Rohrquerschnitte $z =$ konst. während der Deformation, d. h. mit den zunächst willkürlichen Zeitfunktionen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ für die Axialverschiebungen

$$w(z, t) = A_1(t)\,z + A_2(t)\,, \tag{136}$$

3) aus der Verschiebungsgleichung (62) folgende Differentialgleichung für die Radialverschiebungen $v(r, t)$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v)\right] = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\,. \tag{137}$$

Ihre Lösung lautet mit den zunächst willkürlichen Zeitfunktionen $C_1(t)$ und $C_2(t)$

$$v(r, t) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \frac{1}{r}\int r\,\vartheta(r, t)\,dr + \frac{C_1(t)}{2}\,r + \frac{C_2(t)}{r}\,, \tag{138}$$

und damit ergeben sich nach (61) für die Spannungen, sofern man noch (136) beachtet,

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r(r, t) &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\left(\frac{C_1}{2} + \nu A_1\right) - \frac{C_2}{r^2}(1-2\nu) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\,\frac{\alpha_t}{r^2}\int r\,\vartheta\,dr\right],\\
\sigma_\varphi(r, t) &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\left(\frac{C_1}{2} + \nu A_1\right) + \frac{C_2}{r^2}(1-2\nu) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\alpha_t\left(\vartheta - \frac{1}{r^2}\int r\,\vartheta\,dr\right)\right],\\
\sigma_z(r, t) &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu C_1 + (1-\nu) A_1 - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\alpha_t\,\vartheta\right].
\end{aligned}\right\} \tag{139}$$

In (139) werden zunächst die beiden willkürlichen Funktionen $C_1(t)$ und $A_1(t)$ gemäß

$$\frac{C_1}{2} + \nu A_1 = B \tag{140}$$

zu einer neuen willkürlichen Zeitfunktion $B(t)$ zusammengefaßt, und daraufhin aus der ersten Gleichung von (139) mittels der für die Radialspannungen σ_r zu fordernden Randbedingungen $\sigma_r(r_i, t) = 0$, $\sigma_r(r_a, t) = 0$ die Funktionen $B(t)$ und $C_2(t)$ berechnet. Es folgt schließlich für die Spannungen, sofern man beachtet, daß man in der Beziehung für σ_z die Zeitfunktion $C_1(t)$ gemäß (140) durch $B(t)$ und $A_1(t)$ ausdrücken kann,

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r(r, t) &= -\sigma_0 \frac{1}{r_a^2 - r_i^2}\left\{\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 - 1\right]\int_{r_i}^{r} r\,\vartheta\,dr - \left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\int_{r}^{r_a} r\,\vartheta\,dr\right\},\\
\sigma_\varphi(r, t) &= -\sigma_0\left\{\vartheta - \frac{1}{r_a^2 - r_i^2}\left(\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 + 1\right]\int_{r_i}^{r} r\,\vartheta\,dr + \left[1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\int_{r}^{r_a} r\,\vartheta\,dr\right)\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{141}$$

$$\sigma_z(r, t) = -\sigma_0\left\{\vartheta - \frac{2\nu}{r_a^2 - r_i^2}\int_{r_i}^{r_a} r\,\vartheta\,dr - \frac{1-\nu}{\alpha_t} A_1(t)\right\}, \tag{142}$$

wobei zur Abkürzung $E\,\alpha_t/(1-\nu) = \sigma_0$ gesetzt ist. Die bisher noch frei wählbare Zeitfunktion $A_1(t)$ berücksichtigt die Lagerungsverhältnisse des Rohres an seinen Enden. Bemerkenswert ist, daß sich ihr Einfluß allein auf die Axialspannungen beschränkt.

a) **Der ebene Verzerrungszustand.** Liegt das Rohr zwischen zwei in z-Richtung unnachgiebigen Wänden, so ist $\varepsilon_z = \partial w/\partial z = 0$, wofür $A_1(t) = 0$ erforderlich ist. Man erhält dann

aus (142)

$$\sigma_z(r,t) = -\sigma_0\left[\vartheta - \frac{2\,r}{r_a^2 - r_i^2}\int_{r_i}^{r_a} r\,\vartheta\,dr\right]. \tag{143}$$

d) Der Fall freier Zylinderenden. Ist die freie Dehnbarkeit des Rohres in Richtung der Rohrachse gewährleistet, d. h. wirken keine äußeren Kräfte in axialer Richtung auf die Rohrenden, so erfordert das Gleichgewicht der zur z-Achse parallelen Kräfte für ein an der beliebigen Stelle z abgeschnittene Zylinderstück, daß die in der Schnittfläche z wirkenden Axialspannungen σ_z für sich im Gleichgewicht sein müssen. Aus $\int_{r_i}^{r_a}\sigma_z\,dF = 0$ erhält man schließlich mit (142) die Zeitfunktion $A_1(t)$, womit letztlich für die Achsialspannungen

$$\sigma_z(r,t) = -\sigma_0\left[\vartheta - \frac{2}{r_a^2 - r_i^2}\int_{r_i}^{r_a} r\,\vartheta\,dr\right] \tag{144}$$

hervorgeht.

Es sei noch vermerkt, daß die Formeln (141) für σ_r und σ_φ mit $\sigma_0 = E\,\alpha_t$ die entsprechenden Beziehungen für den Fall des ebenen Spannungszustandes darstellen.

V. Näherungslösungen für das ebene Problem bei dünnen Rohren und nicht zu schnellen Anheizvorgängen $\vartheta_i(t) = \vartheta_{i_s}(1 - e^{-\nu_i t})$ des Innenmantels. 1. Das ebene Temperaturfeld bei dünnen Rohren (Abb. 5). Von der Lösung (134) ausgehend erhalten wir für den Fall großer Krümmungshalbmesser mit Verwendung der asymptotischen Entwicklungen für die Zylinderfunktionen $\Phi_{0k}(r)$

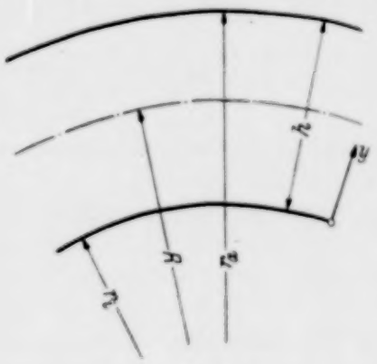

Abb. 5.

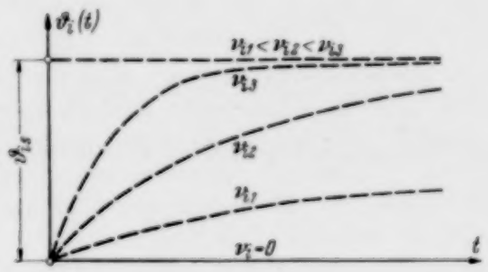

Abb. 6.

das ebene Temperaturfeld in dünnen Rohren, das mit der entsprechenden Lösung für eine Platte übereinstimmt. Es ergibt sich schließlich mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Psi}_k(y) &= d_1 \sin\omega_k\,y - d_2\,\omega_k\cos\omega_k\,y\,, \qquad D_k = \frac{2\,\omega_k^2}{a^2\left[(d_1^2 + d_2^2\,\omega_k^2)\,h - \frac{1}{\omega_k^2}\,\overline{\Psi}_k\,\frac{d\overline{\Psi}_k}{dy}\Big|_0^h\right]}, \\ \eta(y,t) &= \frac{q_i(t)\,[c_1\,(h-y) + c_2] - q_a(t)\,[-d_1\,y + d_2]}{c_1\,d_1\,h + c_2\,d_1 - c_1\,d_2} \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

für das Temperaturfeld

$$\vartheta(y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k\,\overline{\Psi}_k(y)\int_0^t\int_0^h \eta(y,\tau)\,\overline{\Psi}_k(y)\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2(t-\tau)}\,dy\,d\tau, \tag{146}$$

wobei die Eigenwerte ω_k $(k = 1, 2, \ldots)$ aus der transzendenten Gleichung

$$\operatorname{tg}\omega\,h = \omega\,\frac{c_1\,d_2 - c_2\,d_1}{c_1\,d_1 + c_2\,d_2\,\omega^2} \tag{147}$$

hervorgehen. Mit (146) werden analog (135) die Rand- und Anfangsbedingungen

$$c_1\,\vartheta(h,t) + c_2\,\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\Big|_{h,t} = q_a(t)\,, \qquad d_1\,\vartheta(0,t) + d_2\,\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\Big|_{0,t} = q_i(t)\,, \qquad \vartheta(y,0) = 0 \tag{148}$$

befriedigt. Wir untersuchen nachfolgend Spezialfälle, die wir für einen Anheizvorgang

$$\vartheta_i(t) = \vartheta_{is}(1 - e^{-\nu_i t}) \tag{149}$$

auswerten. Hierbei bedeuten ν_i ein willkürlich wählbarer, die Anheizgeschwindigkeit charakterisierender Koeffizient (Abb. 6) und ϑ_{is} die stationäre Endtemperatur des Innenmantels.

a) **Isolierter Außenmantel.** Die Isolation des Außenmantels verhindert jeglichen Wärmeaustritt, und die Randbedingungen lauten daher

$$q_r(r_a, t) = 0\,, \quad \text{d. h.} \quad \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right|_{h,\,t} = 0\,, \qquad \vartheta(0, t) = \vartheta_i(t)\,, \qquad \vartheta(y, 0) = 0\,. \tag{150}$$

Hier kann also aus (146) die entsprechende Lösung dadurch gewonnen werden, daß man $c_1 = 0$, $c_2 = d_1 = 1$, $d_2 = 0$, $q_a(t) = 0$ und $q_i(t) = \vartheta_i(t)$ setzt. Aus der Eigenwertgleichung (147) folgen in diesem Falle

$$\omega_k = \frac{2k-1}{2}\,\frac{\pi}{h}\,,$$

und man erhält schließlich, nachdem man die Integration hinsichtlich y ausgeführt hat,

$$\vartheta(y, t) = \frac{\pi}{(a\,h)^2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \sin\frac{2k-1}{2}\pi\,\frac{y}{h} \int_0^t \vartheta_i(\tau)\, e^{-\left(\frac{2k-1}{2}\,\frac{\pi}{a\,h}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \tag{151}$$

und speziell für den Temperaturverlauf am Außenmantel

$$\vartheta_a(t) = \vartheta(h, t) = \frac{\pi}{(a\,h)^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (2k-1) \int_0^t \vartheta_i(\tau)\, e^{-\left(\frac{2k-1}{2}\,\frac{\pi}{a\,h}\right)^2 (t-\tau)} d\tau\,. \tag{152}$$

Wertet man in (152) das Zeitintegral für das durch (149) gegebene Anheizgesetz aus, so erhält man schließlich mit Beachtung von

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \operatorname{arc\,tg}\, 1 = \frac{\pi}{4}\,,$$

sofern man noch zur Abkürzung

$$\left(\frac{\pi}{2\,a\,h}\right)^2 = \beta$$

setzt,

$$\vartheta_a(t) = \vartheta_{is} - \frac{4}{\pi}\,\vartheta_{is}\, e^{-\nu_i t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left[\frac{\beta\,(2k-1)^2}{\beta\,(2k-1)^2 - \nu_i} - \frac{\nu_i\, e^{-[\beta(2k-1)^2 - \nu_i]\,t}}{\beta\,(2k-1)^2 - \nu_i}\right]$$

und für die Differenz $\Delta\vartheta(t) = \vartheta_i(t) - \vartheta_a(t)$, die sich in der nachfolgenden Näherungslösung für die extremalen Spannungen im wesentlichen als proportional zu den Spannungen erweisen wird,

$$\Delta\vartheta(t) = \vartheta_i(t) - \vartheta_a(t) = \vartheta_{is} \cdot \frac{4}{\pi}\, e^{-\nu_i t}\, \frac{\nu_i}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, \frac{1 - e^{-[\beta(2k-1)^2 - \nu_i]\,t}}{(2k-1)^2 - \left(\frac{\nu_i}{\beta}\right)} \tag{153}$$

(Abb. 7). Bricht man die Reihenentwicklung (153) nach dem ersten Gliede ab, so erhält man für die Temperaturdifferenz eine Näherungslösung

$$\Delta\vartheta(t) \approx \vartheta_{is}\, \frac{4}{\pi}\, \frac{e^{-\nu_i t} - e^{-\beta t}}{\left(\frac{\beta}{\nu_i}\right) - 1}\,, \tag{154}$$

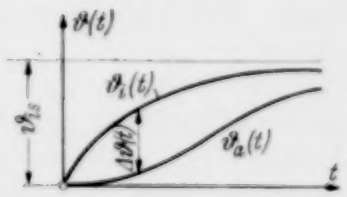

Abb. 7.

die, wie eine entsprechende Restgliedabschätzung ergab, für alle Zeiten t, für die

$$\beta\, t \geq \beta\, t' = 0{,}8 \tag{155}$$

ist, bis auf einen Fehler von höchstens 7,5 % die tatsächlichen Temperaturdifferenzen $\Delta\vartheta(t)$ approximiert. Für Stahlrohre hat man $\beta[\text{sec}^{-1}] = (\pi/2\,a\,h)^2 = 0{,}304/h^2$, wobei h die in cm einzusetzende Rohrwandstärke bedeutet, so daß damit aus (155) $\beta\, t' = 0{,}304 t'/h^2 = 0{,}8$, d. h. $t' = 2{,}63\, h^2$ folgt. Man ersieht hieraus, daß der vernachlässigte Rest um so schneller belanglos wird, je kleiner die Rohrwandstärke h ist. Betrachtet man beispielsweise ein Stahlrohr mit einer Wandstärke von $h = 3$ cm, so wird das vernachlässigte Restglied der Reihenentwicklung bereits nach $t' = 9 \cdot 2{,}63 = 23{,}7$ sec kleiner sein als 7,5%.

Aus einer Extremalrechnung für (154) erhalten wir die größte Temperaturdifferenz

$$\frac{\max \Delta\vartheta}{\vartheta_{is}} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\nu_i}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-(\nu_i/\beta)}} \tag{156}$$

zur Zeit

$$t_0 = \frac{1}{\beta - \nu_i} \ln \frac{\beta}{\nu_i},$$

und indem wir $\beta t_0 \geq \beta t' = 0{,}8$ setzen, erhalten wir schließlich $\beta/\nu_i \geq 1$ als Kriterium für diejenige Anheizgeschwindigkeit, bei der (156) mit einem Fehler von höchstens 7,5% gilt.

Für die Bestimmung von ν_i wollen wir annehmen, daß der Anheizvorgang am Innenmantel dann als abgeschlossen anzusehen sein soll, wenn die stationäre Endtemperatur ϑ_{is} zu 99% erreicht worden ist. Demnach hat man, wenn man mit t_e die bis zu diesem Zeitpunkt verstrichene (Anheiz-) Zeit bezeichnet, $\vartheta_i(t_e) = \vartheta_{is}(1 - e^{-\nu_i t_e}) = 0{,}99\,\vartheta_{is}$ woraus $\nu_i = \frac{\ln 100}{t_e} = \frac{4{,}6052}{t_e}$ hervorgeht. Hiermit folgt aus (156)

$$\frac{\max \Delta\vartheta}{\vartheta_{is}} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{4{,}6052}{\beta t_e}\right)^{\frac{1}{1-(4{,}6052/\beta t_e)}} = f(\beta t_e) \tag{157}$$

(Abb. 8), und zwar mit einem Fehler von höchstens 7,5% für alle Anheizzeiten t_e, die der Beziehung $\beta t_e \geq 4{,}6052$ genügen. Der Wert $f(\beta t_e)$ ist im Bereich $0 \leq \beta t_e \leq 4{,}6052$ weitaus ungenauer, und nimmt für $t_e = 0$ den Wert $4/\pi$ an (gestrichelt), während in Wirklichkeit in diesem Falle $\max \Delta\vartheta/\vartheta_{is} = 1$ sein muß. Die strichpunktierte Linie zeigt den genaueren Verlauf von $f(\beta t_e)$ in diesem Bereich.

b) **Wärmeübergang in ein am Außenrande befindliches Medium der Temperatur Null.** Entsprechend den Ausführungen unter a) kommen wir auch hier zu einer Näherungslösung, wobei nunmehr jedoch $f = f(\beta t_e, N)$ noch in komplizierter Form von der *Nusselt*schen Zahl $N = \lambda/\alpha\, h$ abhängig ist. Es ergibt sich die in Abb. 9 qualitativ skizzierte Kurvenschar, deren Grenzkurve $N = \infty$ wieder den Fall des isolierten Außenmantels darstellt.

2. Näherungslösung für die Spannungen. Nachdem wir in Ziff. 1 Näherungslösungen für $\Delta\vartheta(t)$ und damit auch für $\vartheta_a(t)$ bei vorgegebener Innentemperaturfunktion $\vartheta_{is}(1 - e^{-\nu_i t})$ bestimmt haben, gehen wir mit diesen nun als vorgegeben anzusehenden Randtemperaturfunktionen auf die Lösung (134) zurück, in der gemäß des Rand- und Anfangswertproblems

$$\vartheta(r_a, t) = \vartheta_a(t)\,, \qquad \vartheta(r_i, t) = \vartheta_i(t)\,, \qquad \vartheta(r, 0) = 0 \tag{158}$$

$c_1 = d_1 = 1$, $c_2 = d_2 = 0$, $\varphi_a(t) = \vartheta_a(t)$, $\varphi_i(t) = \vartheta_i(t)$ und damit

$$\eta(r, t) = \frac{\vartheta_i(t) \ln \frac{r_a}{r} - \vartheta_a(t) \ln \frac{r_i}{r}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \tag{159}$$

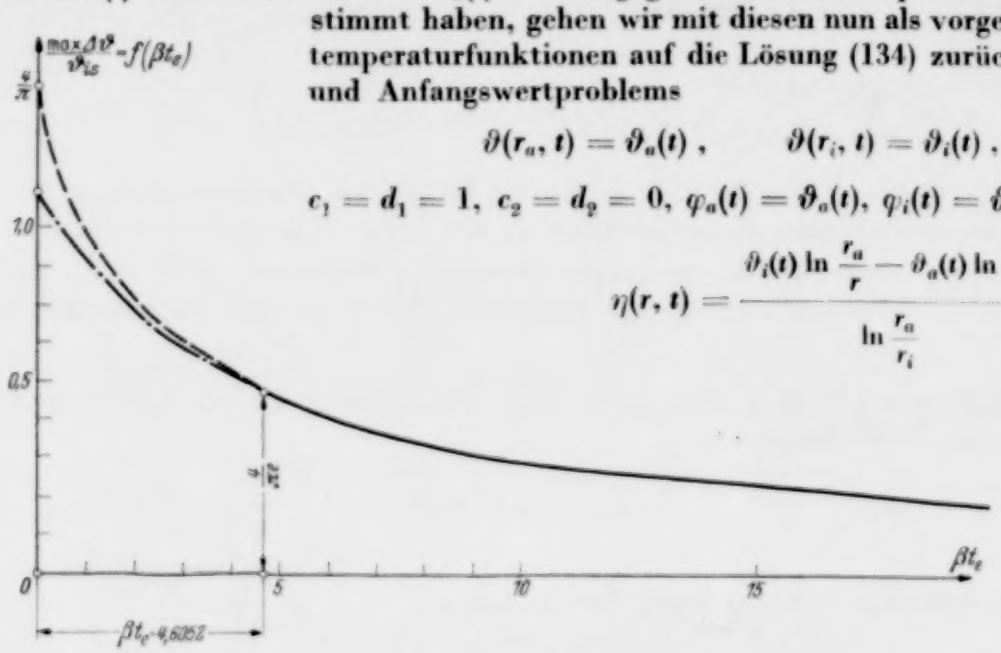

Abb. 8.

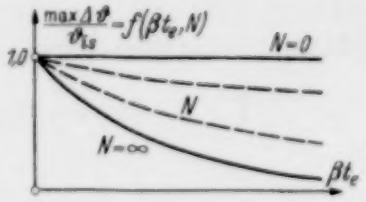

Abb. 9.

zu setzen sind. Indem wir in (134) auf das Zeitintegral die partielle Integrationsregel anwenden und gemäß (48) und (50) beachten, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,\Phi_{0k}(r)}{[r^2(\Phi_{0k}^2 + \Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}} \int_{r_i}^{r_a} \eta(r, t) \cdot r\,\Phi_{0k}(r)\,dr = \eta(r, t)$$

ist, so erhalten wir schließlich mit Rücksicht auf $\vartheta_i(0) = \vartheta_a(0) = 0$

$$\vartheta(r,t) = \eta(r,t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,\Phi_{0k}(r)}{[r^2(\Phi_{0k}^2 + \Phi_{0k}'^2)]_{r_i}^{r_a}} \int_0^t \int_{r_i}^{r_a} r\,\Phi_{0k}(r)\,\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\, e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 (t-\tau)}\, dr\, d\tau\,.$$

Diese Formel vereinfacht sich für den Fall hinreichend langsamer Anheizvorgänge zu

$$\vartheta(r,t) \approx \eta(r,t) = \frac{\vartheta_i(t)\ln\frac{r_a}{r} - \vartheta_a(t)\ln\frac{r_i}{r}}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\,. \tag{160}$$

Sie ist nun ihrem Aufbau nach eine stationäre Lösung, in der die Randwirkungen zeitlich veränderlich sind und mit dieser quasistationären Lösung werden nun die in (141) bis (144) auftretenden Integrale ausgewertet. Es ergeben sich schließlich für den Fall dünner Rohre folgende Extremalspannungen:

a) Radialspannungen

$$\sigma_{r\,extr}(t) = -\frac{1}{8}\,\sigma_0\,\Delta\vartheta(t)\,\frac{h}{R}\,, \tag{161}$$

b) Tangentialspannungen

$$\left.\begin{aligned} \min\sigma_\varphi(t) = \sigma_\varphi(r_i,t) &= -\frac{1}{2}\,\sigma_0\,\Delta\vartheta(t)\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{R}\right)\right], \\ \max\sigma_\varphi(t) = \sigma_\varphi(r_a,t) &= \frac{1}{2}\,\sigma_0\,\Delta\vartheta(t)\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{R}\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{162}$$

c) Axialspannungen im Falle des ebenen Verzerrungszustandes

$$\left.\begin{aligned} \min\sigma_z(t) = \sigma_z(r_i,t) &= -\sigma_0\left[\vartheta_i(t) - \frac{\nu}{2}\left(\vartheta_i(t) + \vartheta_a(t)\right) + \nu\,\frac{\Delta\vartheta(t)}{6}\,\frac{h}{R}\right], \\ \max\sigma_z(t) = \sigma_z(r_a,t) &= -\sigma_0\left[\vartheta_a(t) - \frac{\nu}{2}\left(\vartheta_i(t) + \vartheta_a(t)\right) + \nu\,\frac{\Delta\vartheta(t)}{6}\,\frac{h}{R}\right] \end{aligned}\right\} \tag{163}$$

und im Falle freier Zylinderenden

$$\left.\begin{aligned} \min\sigma_z(t) = \sigma_z(r_i,t) &= -\frac{1}{2}\,\sigma_0\,\Delta\vartheta(t)\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{h}{R}\right), \\ \max\sigma_z(t) = \sigma_z(r_a,t) &= \frac{1}{2}\,\sigma_0\,\Delta\vartheta(t)\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{h}{R}\right). \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

3. Zusammenfassung. Die extremalen Tangential- und Axialdruckspannungen am Innenrande sind also stets absolut größer als die entsprechenden (Zug-)Spannungen am Außenrande. Im Falle freier Zylinderenden sind die extremalen Tangential- und Axial-Druckspannungen bzw. Zugspannungen gleichgroß, im Falle des ebenen Verzerrungszustandes hingegen sind die Axialspannungen größer. Die Radialdruckspannungen sind in sämtlichen Fällen im Verhältnis zu den Tangential- und Axialspannungen klein und daher für die Dimensionierung eines Rohres unwichtig.

Weiterhin erkennen wir an Hand der Näherungsformeln (162) und (164) im Zusammenhang mit Abb. 8 und 9, daß grundsätzlich während des Anheizvorganges höherer Spannungen auftreten als im stationären Endzustand entsprechend der Tatsache, daß die Tempeaturdifferenzenkurve während des Anheizvorganges einen Extremwert besitzt (Abb. 7). Dieser Extremwert ist auch im allgemeinen Falle des Wärmeüberganges in ein Medium der Temperatur Null auf jeden Fall größer als die stationäre Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta_s$, jedoch erkennt man aus Abb. 9, daß für den Fall schlechter Wärmeleitfähigkeit ($N = \lambda/\alpha\,h \to 0$) der stationäre Temperaturdifferenzen-Endwert nicht viel kleiner ist als diejenige Temperaturdifferenz, die sich bei kurzfristigem Anheizen ergibt. Daraus können wir vor allem für nicht zu schnelle Anheizvorgänge folgern, daß die Dimensionierung von Rohren mit sehr schlechter Wärmeleitfähigkeit (z. B. Betonrohre) sofern sie außen nicht isoliert sind, mit genügender Genauigkeit nach den stationären Endtemperaturverhältnissen erfolgen kann. Bei guten Wärmeleitern (Stahlrohre) ist dieses vor allem bei kurzfristigem Anheizen unzulässig, da hierbei die extremalen Temperaturdifferenzen und damit die größten Wärme-

spannungen ein Vielfaches der stationären Endwerte ausmachen können. Im Falle eines außen isolierten Rohres ist $\Delta\vartheta_s$ sogar Null, so daß im Endzustand hier überhaupt keine Wärmespannungen mehr herrschen.

Wir betrachten abschließend ein **Beispiel**: Wie schnell darf ein 3 cm starkes, außen isoliertes Stahlrohr mit freien Enden vom Radius $R = 10$ cm auf die Endtemperatur $\vartheta_{is} = 200°$ gebracht werden, damit die zulässige Höchstspannung $\sigma_{zul} = 0{,}5$ t/cm² nicht überschritten wird? Gegeben sei $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm², $\nu = 0{,}3$; $\alpha_t = 0{,}000\,012$.

Die größten Spannungen sind die Tangential- bzw. Axialdruckspannungen am inneren Rande. Sie betragen mit $\sigma_0 = E\,\alpha_t/(1-\nu)$ für $\Delta\vartheta(t) = \max \Delta\vartheta$

$$|\sigma_z|_{max} = |\sigma_\varphi|_{max} = \frac{E\,\alpha_t}{2(1-\nu)}\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{h}{R}\right) \max \Delta\vartheta\,,$$

und indem man $|\sigma_z|_{max} = |\sigma_\varphi|_{max} \leq \sigma_{zul}$ setzt findet man

$$\max \Delta\vartheta \leq \frac{2\,(1-\nu)\,\sigma_{zul}}{E\,\alpha_t} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\,\frac{h}{R}} = 21{,}7\,, \quad \text{also} \quad \frac{\max \Delta\vartheta}{\vartheta_{is}} = f(\beta\, t_e) \leq 0{,}1085\,.$$

Man zieht nun in Abb. 8 eine Parallele zur Abszissenachse im Abstande 0,1085. Diese schneidet die Temperaturdifferenzenkurve $f(\beta\, t_e)$ ungefähr an der Stelle $\beta\, t_e = 30$. Für ein 3 cm starkes Stahlrohr erhält man $\beta = (\pi/2\,a\,h)^2 = 0{,}304/h^2 = 0{,}0338$ und damit folgt schließlich aus $\beta\, t_e \geq 30$

$$t_e \geq \frac{30}{\beta} = 887{,}5 \text{ sek} = 14{,}8 \text{ Minuten}$$

als kürzeste Anheizzeit.

VI. Achsensymmetrische Probleme bei dünnen Rohren (Kreiszylinderschalen). Nachdem man mittels der asymptotischen Entwicklungen der Zylinderfunktionen und der modifizierten *Bessel*schen Funktionen die Lösung für das Temperaturfeld entsprechend vereinfacht hat, gelingt die Spannungsermittlung in derselben Weise wie beim achsensymmetrischen Problem an dicken Rohren. Einem durch ein thermisch-elastisches Verschiebungspotential definierten Spannungszustand müssen wiederum Randspannungszustände zur Erreichung oberflächenspannungsfreier Ränder überlagert werden. Hierbei wird die Spannungsfreiheit an den Mantelflächen bereits mittels eines zusätzlichen Membranzustandes erreicht, während man das Problem der Oberflächenspannungsfreiheit an den Stirnflächen mit Rücksicht auf die Achsensymmetrie näherungsweise auf ein Randstörungsproblem eines nachgiebig gebetteten Trägers reduzieren kann.

(Eingegangen am 28. Mai 1955.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Rudolf Trostel*, Technische Universität Berlin, Lehrstuhl f. Mechanik (Prof. Dr.-Ing. *Szabó*) Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstraße.

Bestimmung von Rahmenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls

Von H. Fuhrke

1. Einleitung. In einer früheren Arbeit: „Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls“ [1] wurde die Matrizengleichung für die Querschwingungen des viel-feldrigen Balkens hergeleitet, wobei elastische oder starre Zwischenlager vorhanden sein durften. Die Methode soll nun ausgedehnt werden auf die Bestimmung der Eigenfrequenzen ebener Rahmen. Dort tritt eine Koppelung von Biege- und Längsschwingungen oder von Biege- und Torsionsschwingungen auf, je nachdem ob der Rahmen in seiner Ebene oder quer zu seiner Ebene schwingt.

Die Matrizen für die Biegeschwingungen können aus der früheren Arbeit übernommen werden, die für Längs- und Torsionsschwingungen leiten wir hier ab. Anschließend formulieren wir die Übergangsbedingungen an den Rahmenecken und erhalten schließlich die Eigenwertgleichungen für offene und geschlossene Rahmenwerke.

2. Matrizengleichung für Längsschwingungen. Die Differentialgleichung für Stablängsschwingungen ist von der zweiten Ordnung. Damit wird auch die Matrix für Längsschwingungen sehr einfach: sie ist ebenfalls von zweiter Ordnung. Da es für die Herleitung der Differentialgleichung keinen wesentlichen Mehraufwand bedeutet, wollen wir zunächst auch innere und äußere Dämpfung berücksichtigen. Auf die numerische Anwendung verzichten wir allerdings.

An einem Stabelement (Abb. 1) von der Länge dx wirke die äußere, geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft $k_1 \dot{u}\, dx$; das *Newton*sche Grundgesetz heißt dann

$$\mu \ddot{u} + k_1 \dot{u} = N' . \tag{1a}$$

Abb. 1. Dehnstab.

Die an einem Einheitsraumelement wirkende Spannung σ ruft einmal eine Dehnung $\varepsilon = u'$ hervor; zum anderen muß sie aber auch die innere Dämpfung überwinden, die der zeitlichen Dehnungsänderung stets entgegen gerichtet ist, und deren Größe wir proportional $\dot{\varepsilon}$ annehmen wollen: $\sigma = E\varepsilon + r\dot{\varepsilon}$, oder mit $r/E = k_2$

$$\frac{N}{EF} = u' + k_2 \dot{u}' . \tag{1b}$$

Für harmonische Schwingungen erhalten wir aus (1a) und (1b) die Differentialgleichung für Längsschwingungen

$$u'' + \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 u = 0 , \tag{1c}$$

wobei ohne Dämpfung

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2 \mu}{EF} l^2 \tag{2}$$

und mit Dämpfung

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2 \mu \left(1 - i \dfrac{k_1}{\omega \mu}\right)}{EF\,(1 + i\,\omega\, k_2)} l^2 \tag{2a}$$

ist. Die Dämpfung kann also einfach durch eine „komplexe Masse“ bzw. einen „komplexen E-Modul“ erfaßt werden [2], so daß sie in der weiteren formalen Behandlung der Differentialgleichung (1c) gar nicht mehr in Erscheinung tritt.

Der Ansatz

$$u = a \sin \lambda \frac{x}{l} + b \cos \lambda \frac{x}{l}$$

genügt der Differentialgleichung (1c). Nach (1b) ist $N = EFu'$ (worin E bei Dämpfung „komplex und frequenzabhängig“ ist). Für $x = 0$ (Abb. 1) ist $u_i = b$ und $N_i = EF(\lambda/l)\, a$.

[1] *H. Fuhrke*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 329. Gleichungen aus jener Arbeit werden hier in der Form (I, . . .) zitiert.

[2] *K. W. Wagner*, Schwingungen und Wellen, S. 262 und 370, Wiesbaden 1947.

Damit wird

$$u(x) = \frac{l}{\lambda EF} N_i \sin\lambda \frac{x}{l} + u_i \cos\lambda \frac{x}{l}$$

und für $x = l$ erhalten wir mit

$$\overline{N}_i = N_i \frac{\overline{l}^3}{\overline{EI}} \tag{3}$$

und

$$\varrho_i = \frac{l_i \overline{EI}}{\overline{l}^3 EF_i} \tag{4}$$

die Matrizengleichung

$$\begin{bmatrix} u \\ \overline{N} \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \cos\lambda & \frac{\varrho}{\lambda}\sin\lambda \\ -\frac{\lambda}{\varrho}\sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} u \\ \overline{N} \end{bmatrix}_i \tag{5}$$

oder

$$[\mathfrak{x}_{i+1}] = [\mathfrak{R}_i] \cdot [\mathfrak{x}_i] .$$

Die Komponente $\overline{N}$ des Vektors $\mathfrak{x}$ ist auf Grund der Definition (3) dimensionsgleich mit u, wobei die vom jeweiligen Feld i unabhängigen Bezugsgrößen $\overline{l}$ und $\overline{EI}$ aus Teil I, Ziff. 2 übernommen wurden, da wir später gekoppelte Längs- und Querschwingungen behandeln wollen.

Sonderfälle sind:

a) Für $l_i \to 0$ oder $EF_i \to \infty$
mit $\mu_i l_i \to m_i$
folgt $\lambda_i = 0$, $\varrho_i = 0$

und wir erhalten die Massen-Matrix

$$\mathfrak{M}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m_i \overline{l}^3/\overline{EI} & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

b) Für $\mu_i = 0$
(oder $\omega = 0$, Statik)
wird $\lambda_i = 0$

und damit die Elastizitäts-Matrix

$$\mathfrak{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & \varrho_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

c) Kombinieren wir a) und b), so erhalten wir eine der Matrix $\mathfrak{T}$ (I, 31) entsprechende Matrix $\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{E}$ für ein elastisches, masseloses Feld mit Einzelmasse m am linken Ende:

$$\mathfrak{Z}_i = \begin{bmatrix} 1 & \varrho_i \\ -\omega^2 m_i \frac{\overline{l}^3}{\overline{EI}} & \left[1 - \omega^2 m_i \varrho_i \frac{\overline{l}^3}{\overline{EI}}\right] \end{bmatrix} = \mathfrak{E}_i - \omega^2 m_i \frac{\overline{l}^3}{\overline{EI}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \varrho_i \end{bmatrix} . \tag{7a}$$

Das in Teil I Gesagte über Abschnittsmatrix, Randbedingungen, Eigenwertgleichung und Eigenfunktionen gilt analog auch hier. Die Eigenwertgleichungen sind jetzt sehr einfach. Für jeden Rand gibt es nur zwei Möglichkeiten: Festgehalten: $u = 0$, oder frei: $\overline{N} = 0$.

Für den frei-festen, homogenen Stab z. B. erhalten wir aus (5): $0 = \overline{N}_1 \cos\lambda$. Die Matrix $\mathfrak{R}$ für den homogenen Stab, oder allgemeiner die aus i Feldmatrizen nach (I, 29) entstandene Matrix $\mathfrak{A}$ für den beliebig zusammengesetzten Stab enthält bereits die Lösungen für alle möglichen Randbedingungen (Abb. 2).

3. Matrizengleichung für Torsionsschwingungen. Wie bei den Längsschwingungen kann auch bei Torsionsschwingungen die äußere und innere Dämpfung durch eine komplexe „Masse" oder durch einen komplexen „Gleitmodul" berücksichtigt werden, wobei allerdings der Dämpfungsfaktor nicht nur material- sondern auch formabhängig ist[1]. Wir wollen die Matrizengleichung, in der die Dämpfung ohnehin nicht in Erscheinung tritt, für den ungedämpften Torsionsstab herleiten.

Die Drehmasse des Stabelements dx (Abb. 3) ist $d\Theta = \mu i_p^2 dx$. Die Bewegungsgleichung heißt dann $\mu i_p^2 dx \ddot{\chi} = dM_T$, oder für harmonische Schwingungen

$$-\omega^2 \mu i_p^2 \chi = M_T' .$$

[1] *K. Klotter*, Technische Schwingungslehre, 2. Aufl. Bd. 1, S. 237ff. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951.

Mit der Elastizitätsgleichung $\chi' = M_T/GI_T$ wird daraus die Differentialgleichung für Torsionsschwingungen

$$\chi'' + \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \chi = 0 \qquad \text{mit}^1 \qquad \lambda^2 = \frac{\omega^2 \mu\, i_p^2}{GI_T} l^2 . \tag{8}$$

Setzen wir noch entsprechend (I, 6)

$$\bar{\chi}_i = \chi_i \bar{l} \tag{9a}$$

$$\bar{M}_{Ti} = M_{Ti}\, l^2/\overline{EI} \tag{9b}$$

und

$$\gamma_i = \frac{l_i\, \overline{EI}}{\bar{l} GI_{Ti}} \tag{10}$$

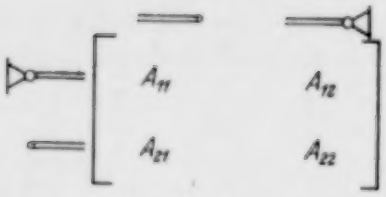

Abb. 2.

Abb. 3. Torsionsstab.

so erhalten wir in Analogie zu (5)

$$\begin{bmatrix} \bar{\chi} \\ \bar{M}_T \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \cos\lambda & \frac{\gamma}{\lambda}\sin\lambda \\ -\frac{\lambda}{\gamma}\sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} \bar{\chi} \\ \bar{M}_T \end{bmatrix}_i \tag{11}$$

oder

$$[\mathfrak{z}_{i+1}] = [\mathfrak{T}_i] \cdot [\mathfrak{z}_i] .$$

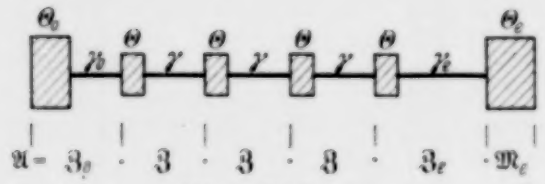

Abb. 4. Läuferkette.

Sonderfälle sind:

a) $l_i \to 0$ oder $GI_{Ti} \to \infty$ mit $\mu_i\, i_{pi}^2\, l_i \to \Theta_i$,

$$\mathfrak{M}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 \Theta_i \frac{\bar{l}}{\overline{EI}} & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

b) $\mu_i = 0$,

$$\mathfrak{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \tag{13}$$

$$\mathfrak{z}_i = \mathfrak{M}_i \cdot \mathfrak{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_i \\ -\omega^2 \Theta_i \frac{\bar{l}}{\overline{EI}} & \left[1 - \omega^2 \Theta_i \gamma_i \frac{\bar{l}}{\overline{EI}}\right] \end{bmatrix} = \mathfrak{E}_i - \omega^2 \Theta_i \frac{\bar{l}}{\overline{EI}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \gamma_i \end{bmatrix} . \tag{14}$$

Für eine Läuferkette mit der Gesamtmatrix $\mathfrak{A}$ (Abb. 4) würde die Frequenzgleichung heißen[2]

$$A_{21} = 0 .$$

4. Eckmatrix für Quer- und Längsschwingungen. Wenn Riegel und Stiele eines Rahmens gleichzeitig (über die Ecken gekoppelte) Quer- und Längsschwingungen in der Rahmenebene ausführen können, so läßt sich hierfür die Frequenzgleichung in Form einer Matrizengleichung aufstellen. Zwischen zwei an einer Ecke senkrecht aneinander anschließenden Schwingungsfeldern kann die Verbindung formal durch eine Matrix beschrieben werden.

---

[1] Der Parameter λ ist natürlich mit einem geeigneten Index zu versehen: λ_b, λ_d, λ_l, wenn sich mehrere Schwingungsarten mischen.

[2] Vgl. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik 2. Aufl. Bd. 2, S. 347ff. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.

Diese Verbindung können wir zunächst durch sechs Gleichungen herstellen: drei geometrische Beziehungen und drei Gleichgewichtsaussagen (Abb. 5):

$$\left.\begin{aligned} u_{i+1} &= w_i\,, & N_{i+1} &= Q_i\,,\\ w_{i+1} &= -u_i\,, & Q_{i+1} &= -N_i\,,\\ \varphi_{i+1} &= \varphi_i\,, & M_{i+1} &= M_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Diese sechs Gleichungen lassen sich nun zu einer Matrizengleichung zusammenfassen mit der Eckmatrix $\mathfrak{F}$:

$$\begin{bmatrix} u\\ \overline{N}\\ w\\ \overline{\varphi}\\ \overline{M}\\ \overline{Q} \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u\\ \overline{N}\\ w\\ \overline{\varphi}\\ \overline{M}\\ \overline{Q} \end{bmatrix}_i \tag{16}$$

oder

$$[\mathfrak{p}_{i+1}] = [\mathfrak{F}] \cdot [\mathfrak{p}_i]\,.$$

Die Vektoren $\mathfrak{p}$ setzen sich dabei aus den Vektoren $\mathfrak{x}$ für Längsschwingungen und $\mathfrak{y}$ für Querschwingungen zusammen. Dementsprechend müssen auch die anschließenden Feld- oder Abschnittsmatrizen zwischen den erweiterten Vektoren $\mathfrak{p}$ vermitteln; sie müssen also außer einer Matrix $\mathfrak{A}$ für Querschwingungen auch noch eine Matrix für Längsschwingungen $\mathfrak{N}$ enthalten. So muß z. B. die Matrizengleichung zwischen $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_{i-1}$ wenn $\mathfrak{A}_{i-1}$ und $\mathfrak{N}_{i-1}$ die Matrizen für Quer- und Längsschwingungen im Abschnitt $i-1$ sind, heißen

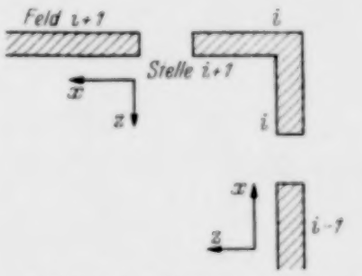

Abb. 5. Rahmenecke (Biegung und Dehnung).

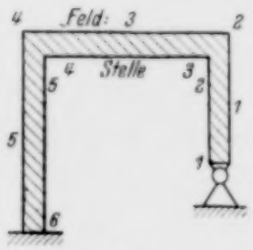

Abb. 6. Rahmen.

$$\begin{bmatrix} u\\ \overline{N}\\ w\\ \overline{\varphi}\\ \overline{M}\\ \overline{Q} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\ N_{21} & N_{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} & \mathfrak{A}_{13} & A_{14}\\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24}\\ 0 & 0 & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34}\\ 0 & 0 & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}_{i-1} \cdot \begin{bmatrix} u\\ \overline{N}\\ w\\ \overline{\varphi}\\ \overline{M}\\ \overline{Q} \end{bmatrix}_{i-1}; \tag{17}$$

oder

$$[\mathfrak{p}_i] = [\mathfrak{P}_{i-1}] \cdot [\mathfrak{p}_{i-1}]\,.$$

Für den Rahmen der Abb. 6 erhalten wir z. B. die Matrizengleichung

$$\mathfrak{p}_6 = \mathfrak{P}_5 \cdot \mathfrak{F}_4 \cdot \mathfrak{P}_3 \cdot \mathfrak{F}_2 \cdot \mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{p}_1\,. \tag{18}$$

Hierbei können die Matrizen $\mathfrak{P}_i$ wieder aus beliebig vielen Feldmatrizen durch Matrizenmultiplikation entstanden sein. $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A}$ können zunächst getrennt aufgestellt werden. Sie brauchen nicht einmal die gleiche Anzahl von Feldern zu haben.

Wie in Teil I Ziff. 5 können wir nun entsprechend den Randbedingungen aus der Matrix $\mathfrak{H}$ (18) die Eigenwertdeterminante gewinnen. Von den je sechs Komponenten der Rand-Vektoren sind

gewöhnlich je drei gleich Null. Bei dem Rahmen nach Abb. 6 z. B. entsteht aus

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \overline{N}_6 \\ 0 \\ 0 \\ \overline{M}_6 \\ \overline{Q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{N}_1 \\ 0 \\ \overline{\varphi}_1 \\ 0 \\ \overline{Q}_1 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

als Eigenwertgleichung

$$\Delta = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{H}_{12} & H_{14} & H_{16} \\ H_{32} & H_{34} & H_{36} \\ H_{42} & H_{44} & H_{46} \end{bmatrix} = 0 \,, \qquad (20)$$

also eine Determinante dritter Ordnung.

5. $\Delta\Delta$-Matrix zur Matrix sechster Ordnung. Zu den in Ziff. 4 angegebenen Matrizen sechster Ordnung lassen sich die zugeordneten „$\Delta\Delta$-Matrizen" aus Determinanten dritter Ordnung entsprechend I, Ziff. 6 bilden, wenn man das folgende Schema benützt:

Zeilen bzw. Spalten-Kombinationen p bzw. $q =$

1 · · 4	5 · · · · 10	11 · · · · 16	17 · · 20	
1.1.1.1.	1.1.1.1.1.1.			
2.2.2.2.		2.2.2.2.2.2.		
3.	3.3.3.	3.3.3.	3.3.3.	
4.	4. 4.4.	4. 4.4.	4.4. 4.	Zeile bzw. Spalte.
5.	5. 5. 5.	5. 5. 5.	5. 5.5.	
6.	6. 6.6.	6. 6.6.	6.6.6.	

(21)

Damit erhält man z. B. aus der Matrix $\mathfrak{P}$ (17) die Matrix $\mathfrak{P}^{\Delta\Delta}$, deren Elemente Eigenwert-Determinanten sind, und zwar für die links neben der Matrix skizzierten linken und die oberhalb der Matrix skizzierten rechten Randbedingungen (Abb. 7).

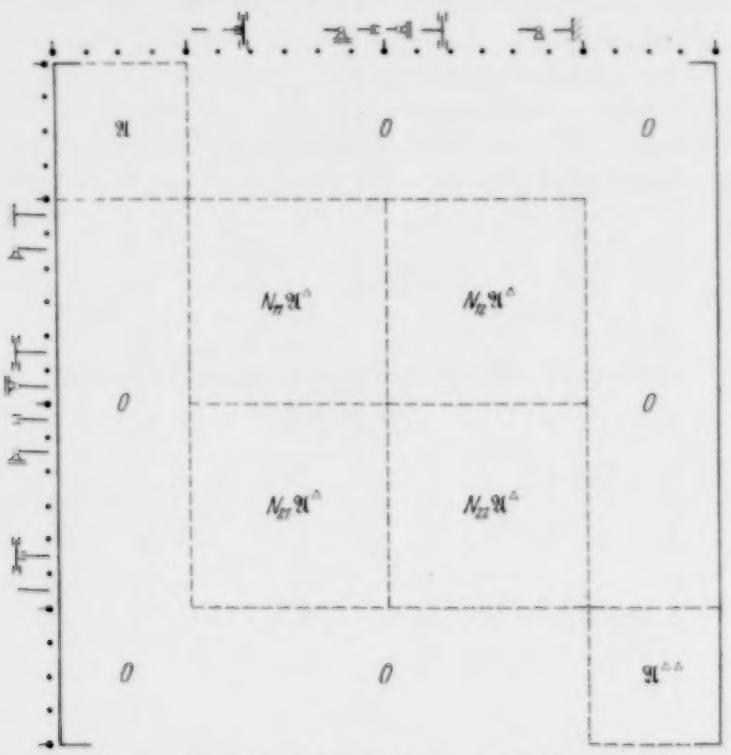

Abb. 7. $\Delta\Delta$-Matrix mit den zugeordneten Randbedingungen.

Die Elemente $A_{pq}^{\Delta\Delta}$ der $\Delta\Delta$-Matrix $\mathfrak{A}^{\Delta\Delta}$ in $\mathfrak{P}^{\Delta\Delta}$ sind die — in der Zeilenfolge p und Spaltenfolge $q = 1, 2, 5, 11$ des Schemas (21) zusammengestellten — 4·4 Unterdeterminanten (dritter Ordnung) von $\mathfrak{A}$. Zwischen $\mathfrak{A}^{\Delta\Delta}$ und der Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ besteht die Beziehung

$$\mathfrak{A}^{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} A_{11}^{\Delta\Delta} & A_{12}^{\Delta\Delta} & A_{13}^{\Delta\Delta} & A_{14}^{\Delta\Delta} \\ A_{21}^{\Delta\Delta} & A_{22}^{\Delta\Delta} & A_{23}^{\Delta\Delta} & A_{24}^{\Delta\Delta} \\ A_{31}^{\Delta\Delta} & A_{32}^{\Delta\Delta} & A_{33}^{\Delta\Delta} & A_{34}^{\Delta\Delta} \\ A_{41}^{\Delta\Delta} & A_{42}^{\Delta\Delta} & A_{13}^{\Delta\Delta} & A_{44}^{\Delta\Delta} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathfrak{A}^{-1}|} \begin{bmatrix} A_{44}^{-1} & -A_{34}^{-1} & A_{24}^{-1} & -A_{14}^{-1} \\ -A_{43}^{-1} & A_{33}^{-1} & -A_{23}^{-1} & A_{13}^{-1} \\ A_{42}^{-1} & -A_{32}^{-1} & A_{22}^{-1} & -A_{12}^{-1} \\ -A_{41}^{-1} & A_{31}^{-1} & -A_{21}^{-1} & A_{11}^{-1} \end{bmatrix}, \qquad (22)$$

wobei für alle hier vorkommenden Matrizen die Hauptdeterminante $|\mathfrak{A}^{-1}| = 1$ ist. Für einen symmetrischen Balken ist ferner: $A_{pq} = (-1)^{p+q} \cdot A_{pq}^{-1} = A_{pq}^{\Delta\Delta}$ oder $\mathfrak{A}^{\Delta\Delta} = \mathfrak{A}$.

Zur Matrix $\mathfrak{F}$ (16) für den Eckübergang gehört

$$\mathfrak{F}^{44} = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc|cc|cc|c}
0&0&0&0 & 0&0&1 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&1&0 & 0\\
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&1 & 0\\
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & -1&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
\hline
0&0&0&0 & 1&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
0&0&0&0 & 0&1&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
-1&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 1&0&0 & 0\\
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 1&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&1 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
\hline
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&1&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&1 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
0&0&0&1 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & -1\\
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&1&0 & 0&0&0 & 0\\
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&1 & 0&0&0 & 0\\
\hline
0&0&0&0 & 0&0&0 & -1&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
0&1&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
0&0&1&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&0&0&0 & 0&0&0 & 0\\
0&0&0&0 & 0&0&0 & 0&0&0 & 0&0 & 0&1&0&0 & 0&0&0 & 0
\end{array}\right], \tag{23}$$

Als Anwendungsbeispiel behandeln wir den unsymmetrischen Rahmen mit Stielen und Riegeln in Längsrichtung starr (Abb. 8). Mit

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_3 \cdot \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{P}_2 \cdot \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{P}_1$$

ist

$$H^{44}_{5,16} = 0 \tag{24}$$

die Eigenwertgleichung. Dabei wird mit $\bar{m} = (m_1 + \mu_2 l_2 + m_3)\, \bar{l}^3/\overline{EI}$ und

$$\mathfrak{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & 1 & & \\ & 0 & & \mathfrak{C} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & \\ & & & 0 \\ -\omega^2\,\bar{m} & 1 & & \\ & 0 & & \mathfrak{B} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & 1 & & \\ & 0 & & \mathfrak{A} \end{bmatrix} \tag{25}$$

die 5. Zeile von $(\mathfrak{P}_3 \mathfrak{F})^{44}$:

$$\begin{bmatrix} -C^4_{13} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C^4_{11} \\ C^4_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C^4_{15} \\ C^4_{16} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C^4_{14} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

die 16. Spalte von $(\mathfrak{P}_2 \mathfrak{F} \mathfrak{P}_1)^{44}$:

$$\begin{bmatrix} -B_{14}\, A^4_{36} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B^4_{15}\, A^4_{16} + B^4_{16}\, A^4_{26} \\ B^4_{25}\, A^4_{16} + B^4_{26}\, A^4_{26} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\omega^2 \bar{m}(B^4_{15}\, A^4_{16} + B^4_{16}\, A^4_{26}) + B^4_{15}\, A^4_{56} + B^4_{16}\, A^4_{66} \\ -\omega^2 \bar{m}(B^4_{25}\, A^4_{16} + B^4_{26}\, A^4_{26}) + B^4_{25}\, A^4_{56} + B^4_{26}\, A^4_{66} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B^{44}_{14}\, A^4_{46} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

die 16. Spalte von $\leftarrow (\mathfrak{F}\, \mathfrak{P}_1)^{44}$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -A^4_{36} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ A^4_{16} \\ A^4_{26} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ A^4_{56} \\ A^4_{66} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ A^4_{46} \end{bmatrix} \tag{26}$$

Folglich wird die Frequenzgleichung

$$\begin{aligned} H^{\Delta\Delta}_{5,16} = {} & C^{\Delta}_{13}\, B_{14}\, A^{\Delta}_{36} + C^{\Delta}_{11}(B^{\Delta}_{15}\, A^{\Delta}_{16} + B^{\Delta}_{16}\, A^{\Delta}_{26}) + C^{\Delta}_{12}(B^{\Delta}_{25}\, A^{\Delta}_{16} + B^{\Delta}_{26}\, A^{\Delta}_{26}) \\ & + C^{\Delta}_{15}\big(-\omega^2\,\overline{m}\,(B^{\Delta}_{15}\, A^{\Delta}_{16} + B^{\Delta}_{16}\, A^{\Delta}_{26}) + B^{\Delta}_{15}\, A^{\Delta}_{56} + B^{\Delta}_{16}\, A^{\Delta}_{66}\big) \\ & + C^{\Delta}_{16}\big(-\omega^2\,\overline{m}\,(B^{\Delta}_{25}\, A^{\Delta}_{15} + B^{\Delta}_{26}\, A^{\Delta}_{26}) + B^{\Delta}_{25}\, A^{\Delta}_{56} + B^{\Delta}_{26}\, A^{\Delta}_{66}\big) + C^{\Delta}_{14}\, B^{\Delta\Delta}_{14}\, A^{\Delta}_{46} = 0\,. \end{aligned} \tag{27}$$

6. Schiefwinkeliger Anschluß. Entsprechend (16) läßt sich auch eine Eck-Matrix $\mathfrak{B}$ für einen Eckanschluß aufstellen, wenn zwei Felder unter dem Winkel φ aneinander anschließen. Aus Abb. 9 liest man ab

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i \cos\varphi + w_i \sin\varphi\,, \\ w_{i+1} &= -u_i \sin\varphi + w_i \cos\varphi\,, \\ \psi_{i+1} &= \psi_i\,, \\ N_{i+1} &= N_i \cos\varphi + Q_i \sin\varphi\,, \\ Q_{i+1} &= -N_i \sin\varphi + Q_i \cos\varphi\,, \\ M_{i+1} &= M_i\,. \end{aligned}$$

Die Eck-Matrix in $\mathfrak{p}_{i+1} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{p}_i$ wird also

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Die $\Delta\Delta$-Matrix hierzu wird [siehe Gl. (28) S. 34].

Mit $\varphi = 0$ wird hieraus die Einheits-Matrix, mit $\varphi = 90°$ die Matrix $\mathfrak{T}^{\Delta\Delta}$ (23).

7. Eckmatrix für Quer- und Torsionsschwingungen. In der gleichen Weise, wie wir in Ziff. 4 die Quer- und Längsschwingungen behandelt haben, wollen wir hier auch verfahren für den Fall, daß zwei senkrecht aneinander anschließende Schwingungsfelder oder Feldketten nicht in ihrer Ebene, sondern senkrecht zu ihrer Ebene schwingen (Abb. 10). Wir können wieder sechs Aussagen für das Eckfeld i machen:

$$\left.\begin{aligned} \chi_{i+1} &= \psi_i\,, & M_{i+1} &= M_{Ti}\,, \\ \psi_{i+1} &= -\chi_i\,, & M_{Ti+1} &= -M_i\,, \\ w_{i+1} &= w_i\,, & Q_{i+1} &= Q_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Hieraus erhalten wir die folgende Matrizengleichung mit der Eckmatrix $\mathfrak{G}$:

$$\begin{bmatrix} \overline{\chi} \\ \overline{M_T} \\ \overline{w} \\ \overline{\psi} \\ \overline{M} \\ \overline{Q} \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\chi} \\ \overline{M_T} \\ \overline{w} \\ \overline{\psi} \\ \overline{M} \\ \overline{Q} \end{bmatrix}_i; \tag{30}$$

oder

$$[\mathfrak{q}_{i+1}] = [\mathfrak{G}] \cdot [\mathfrak{q}_i]\,.$$

Die anschließenden Feld- bzw. Abschnittsmatrizen müssen jetzt die Matrizen $\mathfrak{N}$ für Querschwingungen und $\mathfrak{T}$ für Torsionsschwingungen enthalten.

Die Matrizengleichung zwischen $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{q}_{i-1}$ heißt dann entsprechend (17)

$$\mathfrak{q}_i = \begin{bmatrix} \mathfrak{T} & 0 \\ 0 & \mathfrak{N} \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{q}_{i-1} = \mathfrak{Q}_{i-1} \cdot \mathfrak{q}_{i-1}\,. \tag{31}$$

Hiermit läßt sich z. B. ein Rahmen nach Abb. 6 erfassen, der quer zu seiner Ebene schwingt.

8. Trägheitsfreie Anschlußglieder. Wir wollen die in I, Ziff. 8 gewonnene Matrix $\mathfrak{S}$ für die elastische Stütze (I, 47) noch erweitern a) für zusätzliche Längsschwingungen (Abb. 11a) und b) für zusätzliche Torsionsschwingungen des Riegels (Abb. 11b). Auch hier seien die Anschlußglieder (Stiele) masselos.

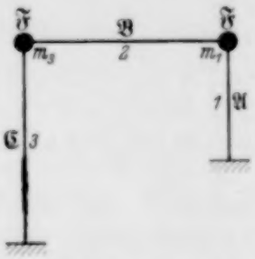

Abb. 8. Rahmenbeispiel.

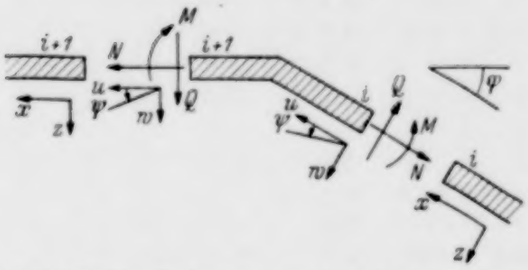

Abb. 9. Übergangsbedingungen an einem beliebigen Knick.

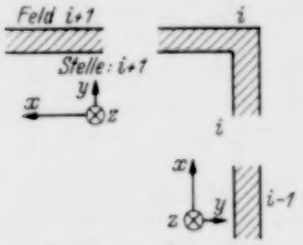

Abb. 10. Rahmenecke (Biegung und Torsion).

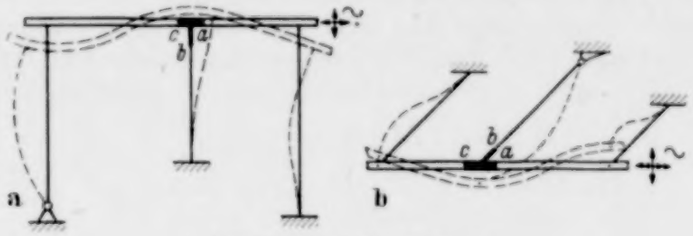

Abb. 11. Mehrstielige Rahmen.

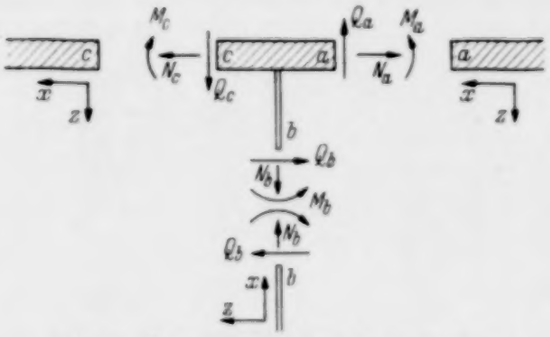

Abb. 12. Übergangsbedingungen an einer Stütze.

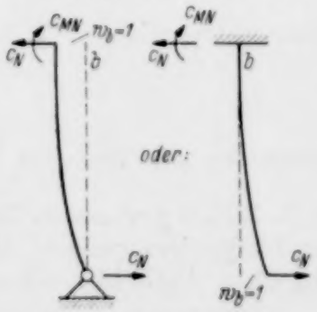

Abb. 13. Stützelastizitäten.

(28)

$$\mathfrak{A} =$$

a) Biege- und Längsschwingungen. Aus Abb. 12 lesen wir sechs geometrische Beziehungen und drei Gleichgewichtsaussagen ab:

$$\left.\begin{aligned} u_e &= u_a = \quad w_b\,, \\ w_e &= w_a = -u_b\,, \\ \varphi_e &= \varphi_a = \quad \varphi_b\,, \end{aligned}\right\} \qquad (32a) \qquad \left.\begin{aligned} N_e &= N_a + Q_b\,, \\ Q_e &= Q_a - N_b\,, \\ M_e &= M_a + M_b\,. \end{aligned}\right\} \qquad (32b)$$

In den folgenden drei Elastizitätsaussagen für den Stiel bezeichnen wir die Federzahlen c nicht nach den Kräften oder Verformungen im Stiel, sondern nach den entgegengesetzt gleichen Kraftgrößen im Riegel. Es ist dann mit (32b)

$$\left.\begin{aligned} N_e - N_a = Q_b &= c_N\, w_b - c_{NM}\, \varphi_b \\ -(Q_e - Q_a) = N_b &= c_Q\, u_b \\ M_e - M_a = M_b &= c_{MN}\, w_b - c_M\, \varphi_b\,. \end{aligned}\right\} \qquad (32c)$$

Nach dem *Maxwell*schen Vertauschungssatz ist: $c_{MN} = c_{NM}$.

Zur Bestimmung der Federzahlen denken wir uns den Stiel jeweils so belastet, daß eine der Formänderungsgrößen am Stielende b (w_b, u_b oder φ_b) gerade $= 1$ wird, während die anderen $= 0$ sind. Die hierzu erforderlichen, am Stielende angreifenden Kräfte sind dann die zugeordneten Federzahlen. So erhalten wir z. B. für den unten gelenkig gelagerten homogenen Stiel (Abb. 13) die Federzahlen c_N und c_{MN} aus

$$w_b = 1 = \frac{c_N\, l^3}{3\,EI} \quad \text{und} \quad c_{MN} = l\, c_N\,.$$

Bei den zwei wesentlichsten Lagerarten des Fußpunktes, Einspannung und Gelenk, ergeben sich so für den homogenen Stiel die folgenden Federzahlen: für die Einspannung am Stützenfußpunkt

$$c_Q = \frac{EF}{l}\,, \quad c_N = \frac{12\,EI}{l^3}\,, \quad c_M = \frac{4\,EI}{l}\,, \quad c_{NM} = \frac{6\,EI}{l^2}\,, \qquad (33)$$

für die gelenkige Lagerung am Stützenfußpunkt

$$c_Q = \frac{EF}{l}\,, \quad c_N = \frac{3\,EI}{l^3}\,, \quad c_M = \frac{3\,EI}{l}\,, \quad c_{NM} = \frac{3\,EI}{l^2}\,. \qquad (33a)$$

Die Beziehungen (32a) und (32c) können wir zu einer Matrizengleichung zusammenfassen, die zwischen den Vektoren $\mathfrak{p}_e$ an der Stelle e und $\mathfrak{p}_a$ an der Stelle a vermittelt. Wir setzen noch

$$\bar{c}_Q = c_Q \frac{\bar{l}^3}{\overline{EI}}\,, \quad \bar{c}_N = c_N \frac{\bar{l}^3}{\overline{EI}}\,, \quad \bar{c}_M = c_M \frac{\bar{l}}{\overline{EI}}\,, \quad \bar{c}_{NM} = c_{NM} \frac{\bar{l}^2}{\overline{EI}} \qquad (34)$$

und erhalten

$$\begin{bmatrix} u \\ \bar{N} \\ w \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_N & 1 & 0 & -\bar{c}_{NM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{c}_{NM} & 0 & 0 & \bar{c}_M & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{c}_Q & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \bar{N} \\ w \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_a \qquad (35)$$

oder

$$[\mathfrak{p}_e] = [\mathfrak{S}_N] \cdot [\mathfrak{p}_a]\,.$$

Lassen wir den Anteil von u und N weg, streichen also von der Matrix $\mathfrak{S}_N$ die zwei ersten Zeilen und Spalten, so führt der Rest zur Gleichung (I, 47), natürlich ohne m und Θ, die wir hier unberücksichtigt gelassen haben.

b) Biege- und Torsionsschwingungen. Der Abb. 14 können wir wieder sechs geometrische Beziehungen und drei Gleichgewichtsaussagen entnehmen:

$$\left.\begin{aligned} w_e &= w_a = \quad w_b\,, \\ \varphi_e &= \varphi_a = \quad \chi_b\,, \\ \chi_e &= \chi_a = -\varphi_b\,, \end{aligned}\right\} \qquad (36a) \qquad \left.\begin{aligned} Q_e &= Q_a + Q_b\,, \\ M_e &= M_a + M_{Tb}\,, \\ M_{Te} &= M_{Ta} + M_b\,. \end{aligned}\right\} \qquad (36b)$$

Entsprechend (32c) schreiben wir mit (36b) die Elastizitätsaussagen in der Form

$$\left.\begin{aligned} Q_c - Q_a = Q_b &= c_Q\, w_b - c_{QT}\, \varphi_b\,, \\ -(M_c - M_a) = M_{Tb} &= c_M\, \chi_b\,, \\ M_{Tc} - M_{Ta} = M_b &= c_{TQ}\, w_b - c_T\, \varphi_b\,, \end{aligned}\right\} \tag{36c}$$

mit

$$c_{TQ} = c_{QT}\,.$$

Ist das Anschlußglied ein homogener Balken, so werden die Federzahlen, wenn der Fußpunkt eingespannt ist,

$$c_M = \frac{GI_T}{l}\,, \quad c_Q = \frac{12\,EI}{l^3}\,, \quad c_T = \frac{4\,EI}{l}\,, \quad c_{QT} = \frac{6\,EI}{l^2}\,, \tag{37}$$

und wenn der Fußpunkt gegen Biegung gelenkig gelagert ist,

$$c_M = \frac{GI_T}{l}\,, \quad c_Q = \frac{3\,EI}{l^3}\,, \quad c_T = \frac{3\,EI}{l}\,, \quad c_{QT} = \frac{3\,EI}{l^2}\,. \tag{37a}$$

Aus den Beziehungen (36a) und (36c) können wir wieder eine Matrizengleichung herleiten zwischen den Vektoren $\mathfrak{q}_c$ an der Stelle c und $\mathfrak{q}_a$ an der Stelle a. Wir setzen:

$$\bar{c}_Q = c_Q \frac{\bar{l}^3}{\bar{EI}}\,, \quad \bar{c}_T = c_T \frac{\bar{l}}{\bar{EI}}\,, \quad \bar{c}_M = c_M \frac{\bar{l}}{\bar{EI}}\,, \quad \bar{c}_{TQ} = c_{TQ} \frac{\bar{l}^2}{\bar{EI}} \tag{38}$$

und erhalten

$$\begin{bmatrix} \bar{\chi} \\ \bar{M}_T \\ w \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_T & 1 & \bar{c}_{TQ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_M & 1 & 0 \\ -\bar{c}_{TQ} & 0 & -\bar{c}_Q & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\chi} \\ \bar{M}_T \\ w \\ \bar{\varphi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_a ; \tag{39}$$

oder

$$[\mathfrak{q}_c] = [\mathfrak{S}_T] \cdot [\mathfrak{q}_a]\,.$$

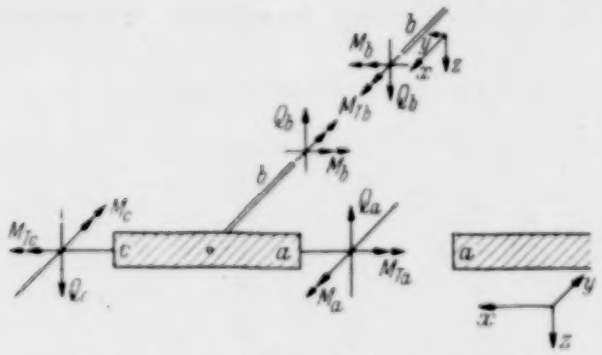

Abb. 14. Übungsbedingungen an einer Stütze.

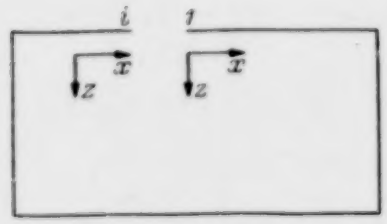

Abb. 15.

Die Matrizen $\mathfrak{S}_N$ und $\mathfrak{S}_T$ können wieder in eine beliebige Feldkette nach Art der Gleichung (18) eingereiht werden. Alle Feldmatrizen eines Systems müssen dabei natürlich auf den gleichen Vektor, im Falle a) auf $\mathfrak{p}$, im Falle b) auf $\mathfrak{q}$ bezogen sein.

9. Geschlossene Feldkette. Mit den Matrizen $\mathfrak{F}$ (16) und $\mathfrak{V}$ (27) für den Eckübergang, $\mathfrak{P}$ (17) für Biege- und Längsschwingungen und $\mathfrak{S}_N$ (35) für das trägheitsfreie Anschlußglied haben wir die Möglichkeit, ein offenes ebenes Stabwerk zu erfassen, das aus beliebig vielen Feldern (homogenen Balkenstücken oder Einzelmassen) besteht, in seiner Ebene beliebig oft rechtwinkelig oder schiefwinkelig abgebogen ist und beliebig viele elastische, masselose Anschlüsse hat.

Ein Stabwerk kann aber auch so aussehen (Abb. 15), daß die Stelle i mit der Stelle 1 zusammentrifft, d. h. es kann geschlossen sein. Zwischen dem Vektor $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_i$ gilt dann die Matrizengleichung

$$[\mathfrak{p}_i] = [\mathfrak{A}] \cdot [\mathfrak{p}_1]\,, \tag{40}$$

und es müssen, wenn die beiden Felder in derselben Richtung liegen, alle Komponenten der Vektoren $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_1$ einander gleich sein:

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_1 . \tag{41}$$

Aus Gleichung (40) wird daher

$$[\mathfrak{p}_1] = [\mathfrak{A}] \cdot [\mathfrak{p}_1]$$

oder

$$[0] = ([\mathfrak{A}] - [\mathfrak{E}]) \cdot [\mathfrak{p}_1] , \tag{42}$$

wobei [0] die Nullmatrix und [$\mathfrak{E}$] die Einheitsmatrix ist [1].

Soll der Vektor $\mathfrak{p}_1$ von Null verschieden sein, so muß die Determinante von ([$\mathfrak{A}$] — [$\mathfrak{E}$]) verschwinden. Die Eigenwertgleichung heißt damit

$$\Delta = | [\mathfrak{A}] - [\mathfrak{E}] | = 0 . \tag{43}$$

Sind die Stellen i und 1 nicht starr, sondern gelenkig verbunden, so müssen wir statt (40), (41) schreiben

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \overline{N}_1 \\ w_1 \\ \overline{\varphi}_i \\ 0 \\ \overline{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \mathfrak{A} \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \overline{N}_1 \\ w_1 \\ \overline{\varphi}_1 \\ 0 \\ \overline{Q}_1 \end{bmatrix} . \tag{44}$$

Da wir auf der rechten Seite eine Unbekannte weniger haben, können wir die Gleichung mit $\overline{\varphi}_i$ unterdrücken und erhalten als Eigenwertgleichung

$$\Delta = \begin{vmatrix} (A_{11} - 1) & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{16} \\ A_{21} & (A_{22} - 1) & A_{23} & A_{24} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & (A_{33} - 1) & A_{34} & A_{36} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & (A_{66} - 1) \end{vmatrix} = 0 . \tag{45}$$

Sind die Stellen i und 1 durch ein gelenkiges Lager verbunden, so ist die Verbindung nicht mehr „echt". Die beiden Enden könnten auch getrennte Lager haben. Zwischen den von Null verschiedenen Komponenten von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_i$ besteht keine Beziehung mehr, und wir erhalten die Lösung wie im Fall der Gleichungen (19) und (20).

Wir sind nunmehr in der Lage, die Eigenfrequenzen eines Rahmens zu ermitteln, wenn er gekoppelte Biege- und Längsschwingungen in seiner Ebene ausführt. Abb. 16 zeigt einen solchen Rahmen. Die Anschlußglieder sind als masselos vorausgesetzt.

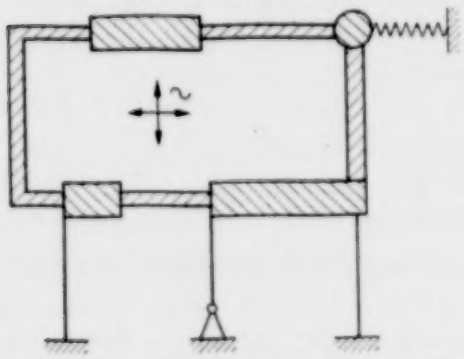

Abb. 16. In der Ebene schwingendes Rahmenwerk.

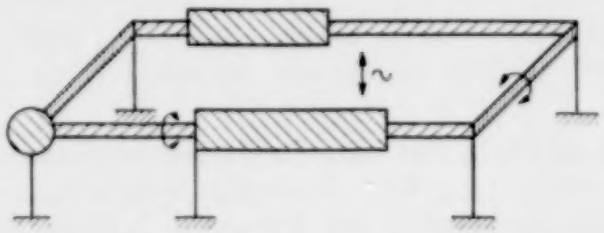

Abb. 17. Aus der Ebene herausschwingendes Rahmenwerk.

Was wir hier für gekoppelte Biege-Längsschwingungen [mit $\mathfrak{p}$ (17) als Vektor der mechanischen Größen] gefunden haben, gilt in gleicher Weise für Biege-Torsionsschwingungen, wenn wir statt $\mathfrak{p}$ den Vektor $\mathfrak{q}$ (30) einsetzen. Die Biegeschwingungen erfolgen dabei senkrecht zur Rahmenebene, während die einzelnen Balken des Rahmens gleichzeitig Torsionsschwingungen um ihre Achse ausführen. Abb. 17 zeigt einen solchen Rahmen. Die Stiele seien auch hier masselos.

Der Rahmen nach Abb. 17 kann aber auch in seiner Ebene schwingen. Dann gilt wieder der Vektor $\mathfrak{p}$, der sich in diesem Fall von $\mathfrak{q}$ nicht nur dadurch unterscheidet, daß er statt der Torsions-Komponenten $\overline{\chi}$ und $\overline{M_T}$ die Längsschwingungskomponenten u und $\overline{N}$ enthält, sondern

[1] *R. Zurmühl*, Matrizen, S. 6 und 11, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

auch dadurch, daß die Biegeanteile in beiden Vektoren ganz verschiedene Bedeutung haben: die Biegekomponenten des Vektors $\mathfrak{p}$ beschreiben die Biegung in der Rahmenebene, die von $\mathfrak{q}$ beziehen sich auf die Biegung senkrecht zur Rahmenebene.

Im allgemeinsten Fall können die Schwingungen in der Rahmenebene und senkrecht dazu auch gekoppelt sein, und zwar immer dann, wenn das Stabwerk (in seinen Massen oder Stielen z. B. Abb. 17) nicht ebenen-symmetrisch ist. Um ein solches Schwingungssystem streng zu erfassen, müssen wir die $2 \cdot 6$ Komponenten der Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zu einem gemeinsamen Vektor und die Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zu einer gemeinsamen Matrix zusammenstellen, wie wir dies bei der Koppelung von Biege- und Längs- oder Torsionsschwingungen gemacht hatten, (17) und (31).

Nach Möglichkeit wird man durch vorherige Abschätzungen, Symmetriebetrachtungen, und dergleichen versuchen, ein solches System so weit wie möglich zu vereinfachen.

10. Dreifelder-Anschluß. Wenn wir die Eigenwertgleichung für ein Stabwerk aufstellen wollen, das nicht nur aus einem durchlaufenden Balken besteht, sondern auch noch Anschlußglieder aufweist, deren Achsen auf der Balkenachse senkrecht stehen, so ist das mit den bisher behandelten Mitteln nur möglich, wenn ein solches Glied an ein Ende des Balkens anschließt, so daß man etwa mit Hilfe der Eckmatrix $\mathfrak{F}$ (16) von der einen Achse zur anderen „umsteigen" kann, oder wenn die Anschlußglieder selbst masselos sind und als elastische Stützen mit den Matrizen $\mathfrak{S}_N$ (35) bzw. $\mathfrak{S}_T$ (39) erfaßt werden können. Bei dem in Abb. 18 dargestellten Rahmen müßte also die Masse des mittleren Stieles vernachlässigbar klein sein. Ist dies nicht der Fall, so müssen wir versuchen, in die Schwingungsgleichung (Matrizengleichung) des vom Lager a zum Lager c durchlaufenden Grundsystems die für sich schwingungsfähige Mittelstütze aufzunehmen.

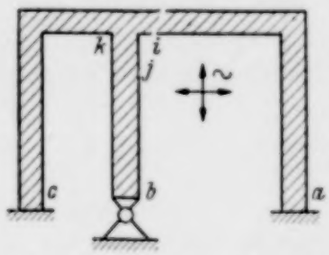

Abb. 18. Rahmen mit massebehafteten Stielen.

a) Wir betrachten zunächst Schwingungen in der Ebene des Stabwerks. Als die Unbekannten führen wir die sechs Vektoren (mit je sechs Komponenten) $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_j$, $\mathfrak{p}_k$ und $\mathfrak{p}_a$, $\mathfrak{p}_b$, $\mathfrak{p}_c$ ein. Zwischen ihnen bestehen 36 Gleichungen. Zunächst die $3 \cdot 3$ Randbedingungen, die je drei Komponenten der Vektoren $\mathfrak{p}_a$, $\mathfrak{p}_b$, $\mathfrak{p}_c$ festlegen, dann die drei Matrizengleichungen (= 18 Komponenten-Gleichungen)

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{p}_a\,, \qquad \mathfrak{p}_j = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{p}_b\,, \qquad \mathfrak{p}_c = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{p}_k \tag{46a}$$

und schließlich die neun Übergangsbedingungen am Knotenpunkt (Abb. 18)

$$\left.\begin{aligned} u_k &= u_i\,, & & \\ \overline{N}_k &= \overline{N}_i - \overline{Q}_j\,, & & \\ w_k &= w_i\,, & & \\ \overline{\psi}_k &= \overline{\psi}_i\,, & u_i &= w_j\,, \\ \overline{M}_k &= \overline{M}_i + \overline{M}_j\,, & w_i &= -u_j\,, \\ \overline{Q}_k &= \overline{Q}_i + \overline{N}_j\,, & \overline{\psi}_i &= \overline{\psi}_j\,, \end{aligned}\right| \tag{46b, c}$$

die wir ebenfalls in Matrizenschreibweise zusammenfassen müssen. Auf der linken Seite der Gleichungen (46b) steht der vollständige Vektor $\mathfrak{p}_k$, auf der rechten Seite der Vektor $\mathfrak{p}_i$, sowie die drei Kraftkomponenten des Vektors $\mathfrak{p}_j$. Diese Beziehungen können wir durch die Matrizengleichung

$$\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{p}_j \tag{47a}$$

darstellen. Die Gleichungen (46c) enthalten die Verschiebungskomponenten der Vektoren $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_j$. Wir können dafür in Matrizenform schreiben

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{p}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{p}_j\,. \tag{47b}$$

Wenn wir von den Stellen i, j, k zu den Stellen a, b, c übergehen, indem wir die Gleichungen (46a) verwenden, erhalten wir aus (47a) und (47b) die Matrizengleichungen

$$\mathfrak{p}_c = \mathfrak{C} \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{p}_a + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{p}_b), \tag{48}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{p}_a + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{p}_b . \tag{49}$$

Wir multiplizieren im Inneren der Gleichungen (48) und (49) die Matrizen $[\ ] \cdot \mathfrak{B}$ und $[\ ] \cdot \mathfrak{A}$ aus, fassen die beiden Gleichungen zusammen und setzen den gemeinsamen Vektor $\begin{bmatrix} \mathfrak{p}_a \\ \mathfrak{p}_b \end{bmatrix}$ heraus. Dann wird aus (48) und (49)

$$\begin{bmatrix} u_c \\ \overline{N}_c \\ w_c \\ \overline{\psi}_c \\ \overline{M}_c \\ Q_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{61} & -B_{62} & -B_{63} & -B_{64} & -B_{65} & -B_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ -B_{31} & -B_{32} & -B_{33} & -B_{34} & -B_{35} & -B_{36} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ -B_{41} & -B_{42} & -B_{43} & -B_{44} & -B_{45} & -B_{46} \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ N_a \\ w_a \\ \overline{\psi}_a \\ \overline{M}_a \\ Q_a \\ u_b \\ \overline{N}_b \\ w_b \\ \overline{\psi}_b \\ \overline{M}_b \\ Q_b \end{bmatrix} \tag{50}$$

Formulieren wir nun die Randbedingungen, so werden rechts je drei Komponenten der Vektoren $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_b$ Null (wenn wir von elastischen Lagern absehen, deren Matrizen aber vor die Randvektoren gesetzt werden können) und zusammen bleiben sechs unbekannte Komponenten übrig. Links werden drei Komponenten des Vektors $\mathfrak{p}_c$ Null, so daß die linken Seiten von sechs Gleichungen des Systems (50) verschwinden. Diese sechs Gleichungen für die sechs übrig gebliebenen Komponenten von $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_b$ stellen ein homogenes Gleichungssystem dar, dessen Determinante die Eigenwert-Determinante des Schwingungssystems ist.

Sind in einem speziellen Fall die Randbedingungen gegeben, so können wir in der Gleichung (50) alle die Zeilen bzw. Spalten der Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ streichen, die zur Aufstellung der Eigenwert-Determinanten nicht gebraucht werden.

Für den in Abb. 18 dargestellten Rahmen erhalten wir so

$$0 = \left[\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{12} & A_{15} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{22} & A_{25} & A_{26} & -B_{62} & -B_{64} & -B_{66} \\ A_{32} & A_{35} & A_{36} & 0 & 0 & 0 \\ A_{42} & A_{45} & A_{46} & 0 & 0 & 0 \\ A_{52} & A_{55} & A_{56} & B_{52} & B_{54} & B_{56} \\ A_{62} & A_{65} & A_{66} & B_{22} & B_{24} & B_{26} \\ A_{12} & A_{15} & A_{16} & -B_{32} & -B_{34} & -B_{36} \\ A_{32} & A_{35} & A_{36} & B_{12} & B_{14} & B_{16} \\ A_{42} & A_{45} & A_{46} & -B_{42} & -B_{44} & -B_{46} \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} N_a \\ M_a \\ Q_a \\ N_b \\ \overline{\psi}_b \\ Q_b \end{bmatrix} \tag{51}$$

Wir können uns demnach schon bei der Aufstellung der Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ darauf beschränken, nur die hier benötigten Elemente zu bestimmen, also von jeder Matrix nur drei Spalten bzw. Zeilen. Multiplizieren wir nun noch die inneren zwei Matrizen von (51) aus, so erhalten wir drei Zeilen von je sechs Elementen, die zusammen mit den darunterstehenden drei Zeilen die Eigenwert-Determinante liefern.

b) Wir wollen jetzt einen Dreifelder-Rahmen betrachten, der senkrecht zu seiner Ebene schwingt (Abb. 19).

Zwischen den drei Rändern a, b, c und den drei Knotenstellen i, j, k bestehen jetzt die drei Gleichungen

$$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{q}_a\,, \qquad \mathfrak{q}_j = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{q}_b\,, \qquad \mathfrak{q}_c = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{q}_k\,, \tag{52a}$$

wobei die Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und die Vektoren $\mathfrak{q}$ die Biege- und Torsionsanteile nach (31) enthalten. Als Übergangsbedingungen am Knoten erhalten wir hier die neun Beziehungen

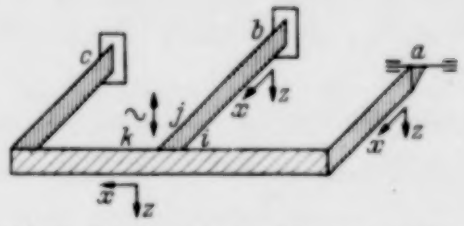

Abb. 19. Rahmen mit massebehafteten Stielen.

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\chi}_k &= \bar{\chi}_i\,, & \bar{\chi}_i &= -\bar{\psi}_j\,,\\
\bar{M}_{Tk} &= \bar{M}_{Ti} - \bar{M}_j\,, & w_i &= w_j\,,\\
w_k &= w_i\,, & \bar{\psi}_i &= \bar{\chi}_j\,,\\
\bar{\psi}_k &= \bar{\psi}_i\,,\\
\bar{M}_k &= \bar{M}_i + \bar{M}_{Tj}\,,\\
\bar{Q}_k &= \bar{Q}_i + \bar{Q}_j
\end{aligned}\right| \tag{52b, c}$$

zwischen den Stellen i, j, k [vgl. (36a) und (36b)].

Wir gehen genau so vor wie unter a) und erhalten die allgemeine Matrizengleichung für Biege- und Torsionsschwingungen

$$\begin{bmatrix} \bar{\chi}_c \\ \bar{M}_{Tc} \\ w_c \\ \bar{\psi}_c \\ \bar{M}_c \\ \bar{Q}_c \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{C} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & -B_{51} & -B_{52} & -B_{53} & -B_{54} & -B_{55} & -B_{56} \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ & & & & & & B_{61} & B_{62} & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} \\ \hline A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & -B_{31} & -B_{32} & -B_{33} & -B_{34} & -B_{35} & -B_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & -B_{11} & -B_{12} & -B_{13} & -B_{14} & -B_{15} & -B_{16} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{\chi}_a \\ \bar{M}_{Ta} \\ w_a \\ \bar{\psi}_a \\ \bar{M}_a \\ \bar{Q}_a \\ \bar{\chi}_b \\ \bar{M}_{Tb} \\ w_b \\ \bar{\psi}_b \\ \bar{M}_b \\ \bar{Q}_b \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich wieder durch Einsetzen der Randbedingungen auf die Hälfte des Umfangs, wenn wir dabei nur die Komponenten-Gleichungen mitnehmen, deren linke Seiten verschwinden. Die Determinante der übrigbleibenden Matrix ist dann wieder die Eigenwert-Determinante.

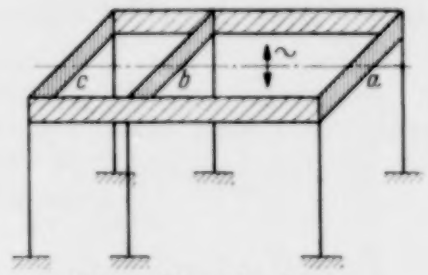

Abb. 20. Räumlicher Rahmen (Stiele masselos).

Wir wollen als Beispiel einen Rahmen (Abb. 20) betrachten, der zu einer Vertikalebene durch a, b, c symmetrisch ist. Die Längs- und Querträger können im übrigen ganz beliebige Massen- und Steifigkeitsverteilung haben. Die Stützen seien masselos. Ihre Längs- und Biegesteifigkeiten können mit Hilfe der Matrix $\mathfrak{S}_N$ (35) berücksichtigt werden. Wir können (bezüglich der Symmetrieebene) symmetrische und antimetrische Schwingungen getrennt behandeln und den Ansatz jeweils auf eine Hälfte des Rahmens beschränken. Für eine solche Hälfte sind die Stellen a, b, c Randstellen, und es gelten die folgenden Randbedingungen für jede der drei Stellen a, b, c:

1) Symmetrische Eigenschwingung:

$$\left.\begin{aligned} M_T &= 0\,,\\ \psi &= 0\,,\\ Q &= 0\,, \end{aligned}\right| \tag{54b}$$

2) Antimetrische Eigenschwingung:

$$\left.\begin{aligned} \chi &= 0\,,\\ w &= 0\,,\\ M &= 0\,. \end{aligned}\right| \tag{54a}$$

Damit erhalten wir aus (53) die beiden Eigenwertgleichungen

1) für symmetrische Eigenschwingungen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{55} & C_{46} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{23} & A_{25} & -B_{51} & -B_{53} & -B_{55} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} & 0 & 0 & 0 \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} & 0 & 0 & 0 \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} & B_{21} & B_{23} & B_{25} \\ A_{61} & A_{63} & A_{65} & B_{61} & B_{63} & B_{65} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A_{11} & A_{13} & A_{15} & B_{41} & B_{43} & B_{45} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} & -B_{31} & -B_{33} & -B_{35} \\ A_{41} & A_{43} & A_{45} & -B_{11} & -B_{13} & -B_{15} \end{matrix} \end{vmatrix} = 0 , \quad (55)$$

2) für antimetrische Eigenschwingungen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} & A_{14} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{22} & A_{24} & A_{26} & -B_{52} & -B_{54} & -B_{56} \\ A_{32} & A_{34} & A_{36} & 0 & 0 & 0 \\ A_{42} & A_{44} & A_{46} & 0 & 0 & 0 \\ A_{52} & A_{54} & A_{56} & B_{22} & B_{24} & B_{26} \\ A_{62} & A_{64} & A_{66} & B_{62} & B_{64} & B_{66} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A_{12} & A_{14} & A_{16} & B_{42} & B_{44} & B_{46} \\ A_{32} & A_{34} & A_{36} & -B_{32} & -B_{34} & -B_{36} \\ A_{42} & A_{44} & A_{46} & -B_{12} & -B_{14} & -B_{16} \end{matrix} \end{vmatrix} = 0 . \quad (56)$$

Wollen wir beide Schwingungsarten erfassen, so brauchen wir die vollbesetzten Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

11. Zweifach geschlossene Feldkette. a) Biege- und Längsschwingungen. Wenn wir die beiden Seitenarme des in Abb. 18 dargestellten Rahmens mit den Enden a und c bis an das Ende b des Mittelarms heranführen und die drei Arme a, b, c verbinden, so entsteht eine zweifach geschlossene Kette. Von irgendwelchen Stützen können wir zunächst absehen, da für jede Stütze insbesondere jede elastische Stütze eine entsprechende Matrix in die betreffende Abschnittsmatrix aufgenommen werden kann. Auch für diesen Rahmen gilt die Gl. (50), und zwar mit den folgenden Übergangsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} u_c &= u_a , & & \\ \overline{N}_c &= \overline{N}_a + \overline{Q}_b , & u_b &= w_a , \\ w_c &= w_a , & w_b &= -u_a , \\ \overline{\varphi}_c &= \overline{\varphi}_a , & \overline{\varphi}_b &= \overline{\varphi}_a . \\ \overline{M}_c &= \overline{M}_a + \overline{M}_b , & & \\ \overline{Q}_c &= \overline{Q}_a - \overline{N}_b , & & \end{aligned}\right\} \quad (57a, b)$$

Setzen wir (57a, b) in (50) ein, so können wir schreiben

$$\begin{bmatrix} u_a \\ \overline{N}_a + \overline{Q}_b \\ w_a \\ \overline{\varphi}_a \\ \overline{M}_a + \overline{M}_b \\ \overline{Q}_a - \overline{N}_b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \dots & & D_{1,12} \\ D_{21} & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & \mathfrak{D}_p & \\ \cdot & & & \\ & & & \\ & & & \\ D_{91} & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ \overline{N}_a \\ w_a \\ \overline{\varphi}_a \\ \overline{M}_a \\ \overline{Q}_a \\ w_a \\ \overline{N}_b \\ -u_a \\ \overline{\varphi}_a \\ \overline{M}_b \\ \overline{Q}_b \end{bmatrix} , \quad (58)$$

also, in Matrizenform, neun Gleichungen für neun Unbekannte. Um die Eigenwertdeterminante zu erhalten, müssen wir die linksstehenden Komponenten von $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_b$ auf die rechte Seite bringen und alle Elemente zusammenfassen, die zu gleichen Komponenten der Vektoren $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_b$ gehören.

Soweit dabei in der Matrix $\mathfrak{D}_p$ die Elemente der Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhalten bleiben (in den untersten drei Zeilen), wollen wir sie auch mit A_{mn} bzw. B_{mn} bezeichnen, wenn wir $\mathfrak{D}_p$ ausschreiben:

$$0 = \begin{bmatrix} (D_{11}-D_{19}-1) & D_{12} & (D_{13}+D_{17}) & (D_{14}+D_{1,10}) & D_{15} & D_{16} & D_{18} & D_{1,11} & D_{1,12} \\ (D_{21}-D_{29}) & (D_{22}-1) & (D_{23}+D_{27}) & (D_{24}+D_{2,10}) & D_{25} & D_{26} & D_{28} & D_{2,11} & (D_{2,12}-1) \\ (D_{31}-D_{39}) & D_{32} & (D_{33}+D_{37}-1) & (D_{34}+D_{3,10}) & D_{35} & D_{36} & D_{38} & D_{3,11} & D_{3,12} \\ (D_{41}-D_{49}) & D_{42} & (D_{43}+D_{47}) & (D_{44}+D_{4,10}-1) & D_{45} & D_{46} & D_{48} & D_{4,11} & D_{4,12} \\ (D_{51}-D_{59}) & D_{52} & (D_{53}+D_{57}) & (D_{54}+D_{5,10}) & (D_{55}-1) & D_{56} & D_{58} & (D_{5,11}-1) & D_{5,12} \\ (D_{61}-D_{69}) & D_{62} & (D_{63}+D_{67}) & (D_{64}+D_{6,10}) & D_{65} & (D_{66}-1) & (D_{68}+1) & D_{6,11} & D_{6,12} \\ (A_{11}+B_{19}) & A_{12} & (A_{13}-B_{17}) & (A_{14}-B_{1,10}) & A_{15} & A_{16} & -B_{18} & -B_{1,11} & -B_{1,12} \\ (A_{21}-B_{29}) & A_{22} & (A_{23}+B_{27}) & (A_{24}+B_{2,10}) & A_{25} & A_{26} & B_{28} & B_{2,11} & B_{2,12} \\ (A_{41}+B_{49}) & A_{42} & (A_{43}-B_{47}) & (A_{44}-B_{4,10}) & A_{45} & A_{46} & -B_{48} & -B_{4,11} & -B_{4,12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ \overline{N}_a \\ w_a \\ \overline{\psi}_a \\ \overline{M}_a \\ \overline{Q}_a \\ \overline{N}_b \\ \overline{M}_b \\ \overline{Q}_b \end{bmatrix} \quad (59)$$

Mit Hilfe der Gl. (59) können die Eigenfrequenzen von Rahmen etwa von der Art der Abb. 21a bis 21c für Schwingungen in der Rahmenebene bestimmt werden. Die stark gezeichneten Teile können dabei ganz beliebige Massen- und Steifigkeitsverteilung haben, solange sie nur symmetrisch zur Rahmenebene bleiben. Die einfach gezeichneten Stützen sind masselose Anschlußglieder. Bei dem Stabwerk der Abb. 21c muß vorher untersucht werden, ob die Koppelung mit Schwingungen senkrecht zur Rahmenebene und mit Torsionsschwingungen vernachlässigbar ist.

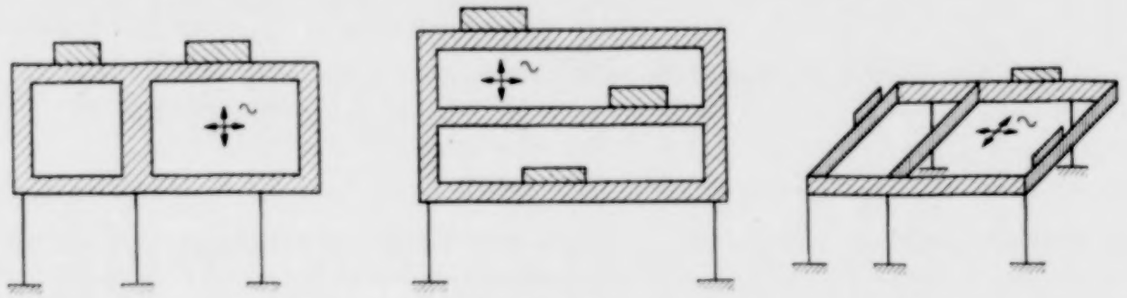

Abb. 21.

b) Biege- und Torsionsschwingungen. In gleicher Weise wie wir für den zweifach geschlossenen Rahmen aus (50) die Gl. (59) für Schwingungen in der Rahmenebene gefunden haben, können wir auch für Schwingungen senkrecht zur Rahmenebene die entsprechende Gleichung aufstellen. Wir gehen aus von der Gl. (53), denken uns die beiden freien Ränder a und c (Abb. 19) mit dem Ende b des Mittelarms vereinigt und formulieren hierfür die Übergangsbedingungen, die wie unter a) in die Grundgleichung (53) eingesetzt und geordnet zu der Gleichung

$$0 = \begin{bmatrix} (D_{11}+D_{1,10}-1) & D_{12} & (D_{13}+D_{19}) & (D_{14}-D_{17}) & D_{15} & D_{16} & D_{18} & D_{1,11} & D_{1,12} \\ (D_{21}+D_{2,10}) & (D_{22}-1) & (D_{23}+D_{29}) & (D_{24}-D_{27}) & D_{25} & D_{26} & D_{28} & (D_{2,11}-1) & D_{2,12} \\ (D_{31}+D_{3,10}) & D_{32} & (D_{33}+D_{39}-1) & (D_{34}-D_{37}) & D_{35} & D_{36} & D_{38} & D_{3,11} & D_{3,12} \\ (D_{41}+D_{4,10}) & D_{42} & (D_{43}+D_{49}) & (D_{44}-D_{47}-1) & D_{45} & D_{46} & D_{48} & D_{4,11} & D_{4,12} \\ (D_{51}+D_{5,10}) & D_{52} & (D_{53}+D_{59}) & (D_{54}-D_{57}) & (D_{55}-1) & D_{56} & (D_{58}+1) & D_{5,11} & D_{5,12} \\ (D_{61}+D_{6,10}) & D_{62} & (D_{63}+D_{69}) & (D_{64}-D_{67}) & D_{65} & (D_{66}-1) & D_{68} & D_{6,11} & (D_{6,12}-1) \\ (A_{11}+B_{19}) & A_{12} & (A_{13}+B_{17}) & (A_{14}-B_{1,7}) & A_{15} & A_{16} & B_{18} & B_{1,11} & B_{1,12} \\ (A_{21}-B_{29}) & A_{22} & (A_{23}-B_{27}) & (A_{24}+B_{2,7}) & A_{25} & A_{26} & -B_{28} & -B_{2,11} & -B_{2,12} \\ (A_{41}-B_{49}) & A_{42} & (A_{43}-B_{47}) & (A_{44}+B_{4,7}) & A_{45} & A_{46} & -B_{48} & -B_{4,11} & -B_{4,12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{z}_a \\ \overline{M}_{Ta} \\ w_a \\ \overline{\psi}_a \\ \overline{M}_a \\ \overline{Q}_a \\ \overline{M}_{Tb} \\ \overline{M}_b \\ \overline{Q}_b \end{bmatrix} \quad (60)$$

führen. Diese Gleichung gilt z. B. für einen Rahmen nach Abb. 20 ohne die dort vorgeschriebene Einschränkung der Symmetrie, allerdings wieder nur dann, wenn keine nennenswerte Koppelung mit Schwingungen in der Rahmenebene eintritt (siehe Ziff. **9**, Schluß).

12. Schlußwort. Mit Hilfe des handlichen Matrizenkalküls lassen sich Balken von beliebiger Felderzahl mit starren oder elastischen Stützen sowie offene oder geschlossene Rahmen mit Koppelung verschiedener Schwingungsarten exakt erfassen, ohne daß dabei der Überblick verloren geht. Die Grenzen, die dem praktischen Rechner heute noch gesetzt sind, werden durch die ständig fortschreitende Technik des Maschinenrechnens immer weiter hinausgerückt. Es ist zu erwarten, daß damit auch unser Kalkül mit der immer wiederkehrenden einfachen Operation der Matrizenmultiplikation immer müheloser angewendet werden kann und daß die hier gezeigten Ansätze dann noch weiter ausgebaut werden können.

(Eingegangen am 7. Juni 1955.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Hartmut Fuhrke* (14a) Fellbach (Württemberg), Heinrich-Heine-Str. 8.

Anwendung von komplexen Veränderlichen zur Synthese einer Kurbelschwinge mit vorgeschriebenen Grenzen der Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeit

Von N. Rosenauer

1. Die Lösung. Das Erscheinen der interessanten Arbeit von *K. H. Sieker*: „Winkel-Längen-Zuordnung an der Schubkurbel, Darstellung mittels komplexer Zahlen" im September-Heft 1954 der „Konstruktion" veranlaßte den Verfasser die Anwendung der komplexen Veränderlichen zur Lösung eines anderen Problems zu zeigen.

Dieses Problem wurde erstmalig von *S. Bloch*[1] behandelt. Eine Lösung wurde auch vom Verfasser 1944 veröffentlicht[2]. Da aber voraussichtlich kaum etwas von dieser Auflage erhalten geblieben ist, so wäre es zweckmäßig, eine Lösung des Problems hier zu zeigen, in der vom Verfasser wesentliche Vereinfachungen eingeführt sind.

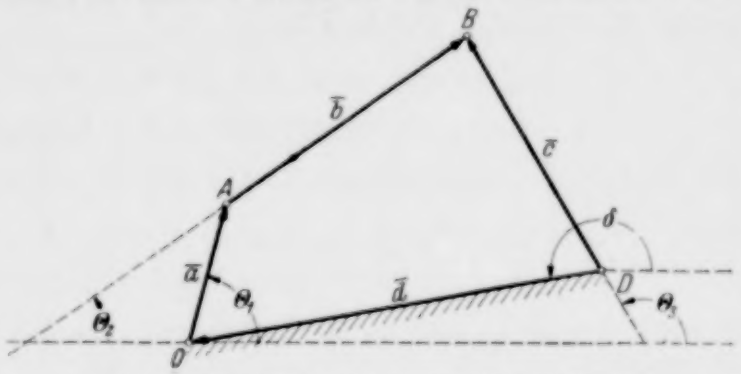

Abb. 1. Gelenkviereck mit eingetragenen Bezeichnungen.

Die komplexen Bezeichnungen der Glieder eines Gelenkvierecks nach Abb. 1 sind $\overline{OA} = \bar{a} = a e^{i\Theta_1}$, $\overline{AB} = \bar{b} = b e^{i\Theta_2}$, $\overline{DB} = \bar{c} = c e^{i\Theta}$, $\overline{DO} = \bar{d} = d e^{i\delta}$, wo Θ_1, Θ_2, Θ_3 veränderliche Winkel darstellen, aber δ ein konstanter Winkel ist, der später bestimmt werden soll.

Das geschlossene Polygon des Gelenkvierecks ist durch die folgende Vektor-Gleichung ausgedrückt:

$$1 \cdot \bar{a} + 1 \cdot \bar{b} - 1 \cdot \bar{c} + 1 \cdot \bar{d} = 0 . \tag{1}$$

Die erste und zweite Ableitung dieser Gleichung nach der Zeit liefert

$$\omega_1 \bar{a} + \omega_2 \bar{b} - \omega_3 \bar{c} + 0 \cdot \bar{d} = 0 , \tag{2}$$

$$(i\,\varepsilon_1 - \omega_1^2)\,\bar{a} + (i\,\varepsilon_2 - \omega_2^2)\,\bar{b} - (i\,\varepsilon_3 - \omega_3^2)\,\bar{c} + 0 \cdot \bar{d} = 0 , \tag{3}$$

wo $\omega_1 = \dot{\Theta}_1$, $\omega_2 = \dot{\Theta}_2$, $\omega_3 = \dot{\Theta}_3$ die Winkelgeschwindigkeiten der Glieder und $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = \ddot{\Theta}_1$, $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \ddot{\Theta}_2$, $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \ddot{\Theta}_3$ die Winkelbeschleunigungen der Glieder bedeuten.

Die Auflösung des Systems (1), (2), (3) ist aus der Matrix abgeleitet

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_3 & 0 \\ i\,\varepsilon_1 - \omega_1^2 & i\,\varepsilon_2 - \omega_2^2 & -i\,\varepsilon_3 + \omega_3^2 & 0 \end{vmatrix} ,$$

wobei der Proportionalitätsfaktor gleich 1 gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned} \bar{a} &= \omega_3\,\omega_2\,(\omega_3 - \omega_2) + (\omega_3\,\varepsilon_2 - \omega_2\,\varepsilon_3)\,i , \\ \bar{b} &= \omega_1\,\omega_3\,(\omega_1 - \omega_3) + (\omega_1\,\varepsilon_3 - \omega_3\,\varepsilon_1)\,i , \\ \bar{c} &= \omega_1\,\omega_2\,(\omega_1 - \omega_2) + (\omega_1\,\varepsilon_2 - \omega_2\,\varepsilon_1)\,i . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Bei gleichförmigem Antrieb des Gliedes OA ist $\varepsilon_1 = 0$, und für die Größt- und Kleinstwerte der Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeit ist auch $\varepsilon_3 = 0$.

Dies vereinfacht die Ausdrücke (4) in die folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} \bar{a} &= \omega_3\,\omega_2\,(\omega_3 - \omega_2) + \omega_3\,\varepsilon_2\,i , \\ \bar{b} &= \omega_1\,\omega_3\,(\omega_1 - \omega_3) , \\ \bar{c} &= \omega_1\,\omega_2\,(\omega_1 - \omega_2) + \omega_1\,\varepsilon_2\,i . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1] *S. Bloch*, Zur Synthese von viergliedrigen Mechanismen. Nachrichten der Akad. der Wiss. U.R.S.S. 1940 N. 1.

[2] *N. Rosenauer*, Gelenkvierecke mit vorgeschriebenen Größt- und Kleinstwerten der Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeiten, Mabau.-Getriebetechnik 12 (1944) S. 25–27.

Die Ausdrücke (5) stellen die Glieder zweier verschiedener Gelenkvierecke dar; das eine entspricht $\max \omega_3$ und das andere $\min \omega_3$, die in verschiedenen Maßstäben erscheinen.

Bezeichnet man die Glieder des ersten Gelenkvierecks mit a_1, b_1, c_1, d_1 und die Glieder des zweiten mit a_2, b_2, c_2, d_2, so hat man zwei Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \omega_{31}\,\omega_{21}\,(\omega_{31}-\omega_{21}) + \omega_{31}\,\varepsilon_{21}\,i\,, & \bar{a}_2 &= \omega_{32}\,\omega_{22}\,(\omega_{32}-\omega_{22}) + \omega_{32}\,\varepsilon_{22}\,i\,,\\ \bar{b}_1 &= \omega_1\,\omega_{31}\,(\omega_1-\omega_{31})\,, & \bar{b}_2 &= \omega_1\,\omega_{32}\,(\omega_1-\omega_{32})\,,\\ \bar{c}_1 &= \omega_1\,\omega_{21}\,(\omega_1-\omega_{21}) + \omega_1\,\varepsilon_{21}\,i\,, & \bar{c}_2 &= \omega_1\,\omega_{22}\,(\omega_1-\omega_{22}) + \omega_1\,\varepsilon_{22}\,i\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Falls die Gleichungen (6) dasselbe Gelenkviereck in zwei verschiedenen Lagen darstellen sollen, müssen die Maßstäbe gleichgesetzt werden. Dies wird erreicht, indem man $b_1 = k\,b_2$ setzt. Hieraus folgt das Verhältnis der Maßstäbe $k = b_1/b_2$.

Die Gleichsetzung der Quadrate der Glieder a und c unter Berücksichtigung des Koeffizienten k ergibt die folgenden Gleichungen:

$$\omega_{31}^2\,\omega_{21}^2\,(\omega_{31}-\omega_{21})^2 + \omega_{31}^2\,\varepsilon_{21}^2 = k^2\,\omega_{32}^2\,\omega_{22}^2\,(\omega_{32}-\omega_{22})^2 + k^2\,\omega_{32}^2\,\varepsilon_{22}^2\,, \tag{7}$$

$$\omega_{21}^2\,(\omega_1-\omega_{21})^2 + \varepsilon_{21}^2 = k^2\,\omega_{22}^2\,(\omega_1-\omega_{22})^2 + k^2\,\varepsilon_{22}^2\,. \tag{8}$$

Die dritte Gleichung folgt aus (1) $\bar{d} = \bar{c} - \bar{a} - \bar{b}$ mit $d_1 = k\,d_2$ zu

$$\begin{aligned} &[\omega_1\,\omega_{21}\,(\omega_1-\omega_{21}) - \omega_{31}\,\omega_{21}\,(\omega_{31}-\omega_{21}) - \omega_1\,\omega_{31}\,(\omega_1-\omega_{31})]^2 + (\omega_1-\omega_{31})^2\,\varepsilon_{21}^2\\ &= k^2\,[\omega_1\,\omega_{22}\,(\omega_1-\omega_{22}) - \omega_{32}\,\omega_{22}\,(\omega_{32}-\omega_{22}) - \omega_1\,\omega_{32}\,(\omega_1-\omega_{32})]^2 + k^2\,(\omega_1-\omega_{32})^2\,\varepsilon_2^2\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Betrachtet man ε_{21} und ε_{22} als Unbekannte, so führt das zum folgenden System von drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{31}^2\,\varepsilon_{21}^2 - k^2\,\omega_{32}^2\,\varepsilon_{22}^2 &= k^2\,\omega_{32}^2\,\omega_{22}^2\,(\omega_{32}-\omega_{22})^2 - \omega_{31}^2\,\omega^2{}_1\,(\omega_{31}-\omega_{21})^2\,,\\ \varepsilon_{21}^2 - k^2\,\varepsilon_{22}^2 &= k^2\,\omega_{22}^2\,(\omega_1-\omega_{22})^2 - \omega_{21}^2\,(\omega_1-\omega_{21})^2\,,\\ (\omega_1-\omega_{31})^2\,\varepsilon_{21}^2 - k^2\,(\omega_1-\omega_{32})^2\,\varepsilon_{22}^2 &= k^2\,[\omega_1\,\omega_{22}\,(\omega_1-\omega_{22}) - \omega_{32}\,\omega_{22}\,(\omega_{32}-\omega_{22}) - \omega_1\,\omega_{32}\,(\omega_1-\omega_{32})]^2\\ &\quad - [\omega_1\,\omega_{21}\,(\omega_1-\omega_{21}) - \omega_{31}\,\omega_{21}\,(\omega_{31}-\omega_{21}) - \omega_1\,\omega_{31}\,(\omega_1-\omega_{31})]^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Elimination von ε_{21} und ε_{22} aus diesem System führt zu einer kubischen Gleichung, die ω_{21} und ω_{22} enthält.

Da man beweisen kann, daß

$$\frac{d\varepsilon_3}{dt} = \dot{\varepsilon}_3 = \omega_3\,(\omega_3-\omega_1)\,(\omega_1+\omega_3-3\,\omega_2)$$

ist, so genügt es, einen Wert für ω_{21} so zu wählen, daß die Ungleichung

$$\omega_{31}\,(\omega_{31}-\omega_1)\,(\omega_1+\omega_{31}-3\,\omega_{21}) < 0$$

für ein max ω_3 befriedigt ist. Setzt man diesen Wert in die kubische Gleichung, so kann man allgemein drei Wurzeln für ω_{22} berechnen.

Um die Gültigkeit dieser Wurzeln festzustellen muß die Wurzel erstens die Ungleichung

$$\omega_{32}\,(\omega_{32}-\omega_1)\,(\omega_1+\omega_{32}-3\,\omega_{22}) > 0$$

für ein min ω_3 befriedigen, und zweitens müssen die Gleichungen (10) für ε_{21}^2 und ε_{22}^2 positive Größen ergeben.

Falls diese Forderungen erfüllt sind, kann das gesuchte Gelenkviereck in beiden Lagen unter Berücksichtigung des Koeffizienten k gezeichnet werden.

Der soeben beschriebene Gedankengang der Lösung wird an dem folgenden Zahlenbeispiel erläutert.

2. Ein Beispiel. Gegeben sei

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 10\ \text{sec}^{-1}\,, & \varepsilon_1 &= 0\,,\\ \omega_{31} &= 6\ \text{sec}^{-1}\,, & \varepsilon_{31} &= 0\,,\\ \omega_{32} &= -\ 8\ \text{sec}^{-1}\,, & \varepsilon_{32} &= 0\,. \end{aligned}$$

Das entsprechende Gelenkviereck soll in den zwei entsprechenden Lagen für die vorgeschriebenen Grenzen der Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeit bestimmt werden.

Erstens berechnet man das Verhältnis der Maßstäbe k aus den gegebenen Größen:

$$k = \frac{b_1}{b_2} = \frac{\omega_1 \omega_{31} (\omega_1 - \omega_{31})}{\omega_1 \omega_{32} (\omega_1 - \omega_{32})} = \frac{6 (10 - 6)}{-8 (10 + 8)} = -\frac{1}{6} .$$

Setzt man den Wert von k und die gegebenen Werte von ω_{31} und ω_{32} in die Gleichungen (10), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} 81\,\varepsilon_{21}^2 - 4\,\varepsilon_{22}^2 &= 4\,\omega_{22}^2 (8 + \omega_{22})^2 - 81\,\omega_{21}^2 (6 - \omega_{21})^2 , \\ 36\,\varepsilon_{21}^2 - \varepsilon_{22}^2 &= \omega_{22}^2 (10 - \omega_{22})^2 - 36\,\omega_{21}^2 (10 - \omega_{21})^2 , \\ 16\,\varepsilon_{21}^2 - 9\,\varepsilon_{22}^2 &= 9\,(\omega_{22}^2 - 2\,\omega_{22} - 80)^2 - 16\,(\omega_{21}^2 - 16\,\omega_{21} + 60)^2 . \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Die Elimination von ε_{21} und ε_{22} aus diesen Gleichungen liefert die Determinante, die gleich Null gesetzt werden muß:

$$\begin{vmatrix} 81 & 4 & 4\,\omega_{22}^2 (8 + \omega_{22})^2 - 81\,\omega_{21}^2 (6 - \omega_{21})^2 \\ 36 & 1 & \omega_{22}^2 (10 - \omega_{22})^2 - 36\,\omega_{1}\,(10 - \omega_{21})^2 \\ 16 & 9 & 9\,(\omega_{22}^2 - 2\,\omega_{22} - 80)^2 - 16\,(\omega_{21}^2 - 16\,\omega_{21} + 60)^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Auswertung der Determinante führt nach einigen Vereinfachungen zur Gleichung

$$7\,\omega_{22}^3 + 20\,\omega_{22}^2 - 36\,\omega_{22} - 42\,\omega_{21}^3 + 372\,\omega_{21}^2 - 384\,\omega_{21} = 0 . \quad (12)$$

Der Wert von ω_{21} kann jetzt so gewählt werden, daß die Ungleichung

$$\omega_{31} (\omega_{31} - \omega_1) (\omega_1 + \omega_{31} - 3\,\omega_{21}) < 0 \quad (13)$$

befriedigt ist. Diese gibt

$$-24 (16 - 3\,\omega_{21}) < 0 .$$

Es ist vorteilhaft $\omega_{21} = 0$ zu wählen, da in diesem Falle die kubische Gleichung (12) zu einer quadratischen reduziert wird. Eine Wurzel ist dann $\omega_{22} = 0$, und die zwei übrigen erhält man aus der Gleichung

$$7\,\omega_{22}^2 + 20\,\omega_{22} - 36 = 0 .$$

Dies ergibt $\omega_{22} = 1{,}25$ und $\omega_{22} = -4{,}11$.

Die gültige Wurzel muß erstens der Ungleichung

$$\omega_{32} (\omega_{32} - \omega_1) (\omega_1 + \omega_{32} - 3\,\omega_{22}) > 0 \quad (14)$$

genügen und zweitens aus den Gleichungen (11) positive Werte für ε_{21}^2 und ε_{22}^2 liefern. Die Untersuchung der Wurzel $\omega_{22} = 0$ zeigt, daß diese keine tauglichen Werte für ε_{21}^2 und ε_{22}^2 gibt. Die Wurzel $\omega_{32} = 1{,}25$ genügt der Ungleichung (14) nicht. Die Wurzel $\omega_{22} = -4{,}11$ befriedigt die Ungleichung (14) und gibt positive Werte für ε_{21}^2 und ε_{22}^2 aus den Gleichungen (11). Man erhält dabei

$$\varepsilon_{21}^2 = 197{,}268 , \qquad \varepsilon_{21} = \pm 14\ \mathrm{sec}^{-2} ,$$
$$\varepsilon_{22}^2 = 3738{,}98 , \qquad \varepsilon_{22} = \mp 61{,}1\ \mathrm{sec}^{-2} .$$

Mit Benutzung der oberen Zeichen erhalten die Glieder des gesuchten Gelenkvierecks in der ersten Lage aus (6) folgende komplexe Ausdrücke:

$$\bar{a}_1 = \omega_{31}\,\omega_{21} (\omega_{31} - \omega_{21}) + \omega_{31}\,\varepsilon_{21}\,i = 0 + 6 \cdot 14\,i = 84\,i ,$$
$$\bar{b}_1 = \omega_1\,\omega_{31} (\omega_1 - \omega_{31}) = 10 \cdot 6\,(10 - 6) = 240 ,$$
$$\bar{c}_1 = \omega_1\,\omega_{21} (\omega_1 - \omega_{21}) + \omega_1\,\varepsilon_{21}\,i = 0 + 10 \cdot 14\,i = 140\,i ,$$
$$\bar{d}_1 = \bar{c}_1 - \bar{a}_1 - \bar{b}_1 = 140\,i - 84\,i - 240 = -240 + 56\,i .$$

Das entsprechende Gelenkviereck $O_1 A_1 B_1 D_1$ in Abb. 2 zeigt die Lage, in der eine maximale Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeit auftritt.

Um die zweite Lage des Gelenkvierecks für die minimale Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeit zu bestimmen, muß in die komplexen Ausdrücke der Glieder (6) der Koeffizient $k = -1/6$ eingeführt werden, was die folgenden Resultate ergibt:

$$\bar{a}_2 = k\,\omega_{32}\,\omega_{22} (\omega_{32} - \omega_{22}) + k\,\omega_{32}\,\varepsilon_{22}\,i = 21{,}3 - 81{,}5\,i ,$$
$$\bar{b}_2 = k\,\omega_1\,\omega_{32} (\omega_1 - \omega_{32}) = 240 ,$$
$$\bar{c}_2 = k\,\omega_1\,\omega_{22} (\omega_1 - \omega_{22}) + k\,\omega_1\,\varepsilon_{22}\,i = 96{,}6 + 101{,}8\,i ,$$
$$\bar{d}_2 = \bar{c}_2 - \bar{a}_2 - \bar{b}_2 = 96{,}6 + 101{,}8\,i - 21{,}3 + 81{,}5\,i - 240 = -164{,}7 + 183{,}3\,i .$$

Das entsprechende Gelenkviereck für die minimale Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeit $O_1 A_2' B_2' D_2'$ ist in Abb. 2 gezeigt. Falls dieses zweite Gelenkviereck um O_1 so gedreht wird, daß die Stege zusammenfallen, erhält man dasselbe Gelenkviereck in seiner zweiten Lage $O_1 A_2 B_2 D_1$. Die Kontrolle der erhaltenen Lösung ist in Abb. 3 durchgeführt, wo beide Lagen des Gelenkvierecks gezeigt sind.

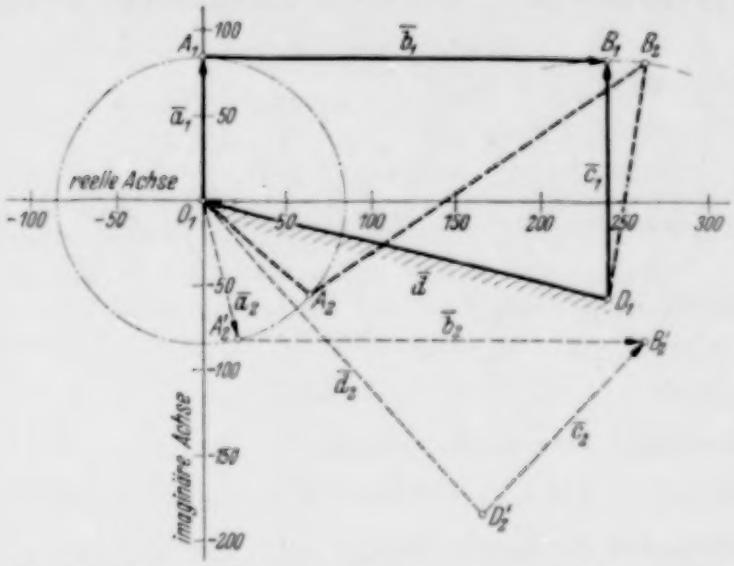

Abb. 2. Zwei Lagen des gesuchten Gelenkvierecks mit $\omega_1 = 10\ \mathrm{sec}^{-1}$, $\max \omega_3 = 6\ \mathrm{sec}^{-1}$, $\min \omega_3 = -8\ \mathrm{sec}^{-1}$. Annahme: $\omega_{21} = 0$. Berechnet: $\omega_{21} = -4{,}11\ \mathrm{sec}^{-1}$, $\varepsilon_{21} = \pm 14\ \mathrm{sec}^{-2}$, $\varepsilon_{22} = \mp 61{,}1\ \mathrm{sec}^{-2}$.

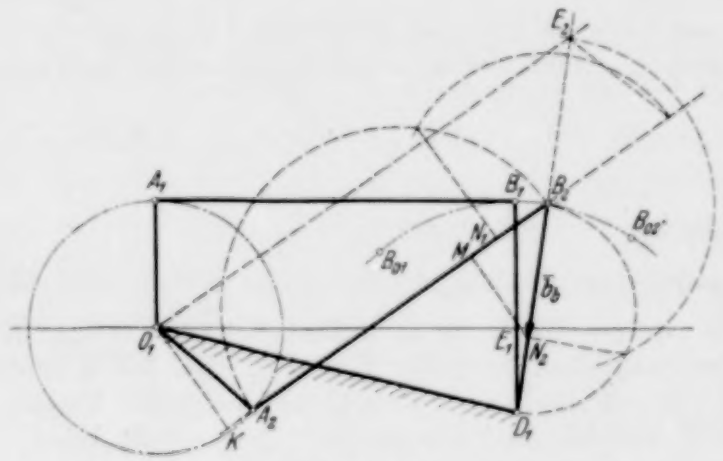

Abb. 3. Kontrolle der erhaltenen Lösung mittels graphischer Konstruktionen.

In der ersten Lage $O_1 A_1 B_1 D_1$ ist die Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeit

$$\omega_{31} = \frac{B_1 E_1}{B_1 D_1} \omega_1 = \frac{84}{140} 10 = 6\ \mathrm{sec}^{-1},$$

wie vorgeschrieben. Außerdem sind die Geschwindigkeiten der Punkte A_1 und B_1 einander gleich, also die relative Normalbeschleunigung der beiden Punkte gleich Null. Dies bedeutet, daß die Beschleunigung des Punktes B_1 mit dem Gliede $B_1 D_1$ zusammenfällt und folglich die Lage einem Extremwert der Winkelgeschwindigkeit entspricht.

In der zweiten Lage $O_1 A_2 B_2 D_1$ ist die Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeit

$$\omega_{32} = -\frac{B_2 E_2}{B_2 D_1} \omega_1 = -\frac{112}{140} 10 = -8\ \mathrm{sec}^{-1},$$

wie vorgeschrieben.

Die Beschleunigung des Punktes B_2 ist graphisch konstruiert[1] und ergibt sich als $B_2 N_2$, wiederum in der Richtung des Gliedes $B_2 D_1$. Dies bedeutet, daß auch in dieser Lage ein Extremwert der Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeit auftritt.

Da die Wahl des Wertes von ω_{21} nur durch die Ungleichung (13) begrenzt war, ist die Anzahl der Lösungen unendlich groß. Dies bedeutet, daß außer den vorgeschriebenen Bedingungen noch andere erfüllt werden können.

Nimmt man für ε_{21} und ε_{22} die unteren Zeichen so erhält man ein Spiegelbild desselben Gelenkvierecks, also eigentlich dieselbe Lösung.

Einen anderen Beweis dafür, daß die erhaltenen Getriebelagen den extremen Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeiten entsprechen, liefert die von *F. Freudenstein* in seiner Arbeit[2] festgestellte Eigenschaft, daß in den genannten Lagen die Kollineationsachse zur Koppel senkrecht steht. Diese Kontrolle ist in Abb. 3 nicht durchgeführt, sondern dem Leser überlassen.

(Eingegangen am 16. Juni 1955.)

Dr.-Ing. *N. Rosenauer*, A.M.I.E. (Aust.) N.S.W. University of Technology
Broadway, Sydney, N. S. W. Australia.

[1] *N. Rosenauer* und *A. H. Willis*, Kinematics of Mechanisms. S. 212—218, Sydney 1953.
[2] *F. Freudenstein*. Trans. A.S.M.E. Paper No. 55—SA—20.

Über die Verwendung von Bipolarkoordinaten zur Lösung einiger Probleme der Plattenbiegung

Von S. Woinowsky-Krieger

1. Einleitung. Die Halbkreisplatte wird gewöhnlich als ein Sonderfall der Kreissektorplatte betrachtet und das Problem ihrer Biegung dementsprechend in Polarkoordinaten behandelt. Ist nun die Halbkreisplatte an ihrem Rande eingespannt, so muß man sich dabei allerdings mit Näherungslösungen begnügen. Für die gleichförmig verteilte Belastung wurden solche Lösungen von *R. Kuno*[1], von *H. R. Hassé*[2] und schließlich von *H. D. Conway* und *M. K. Huang*[3] angegeben. *Hassé* benutzt in seiner Arbeit eine von *A. Weinstein*[4] herrührende Methode und beschränkt sich dabei auf die Berechnung der Durchbiegung der Platte. *Conway* und *Huang* gehen dagegen von der elastischen Fläche einer gleichförmig belasteten eingespannten Kreisplatte aus und bringen die Durchbiegungen längs eines Durchmessers dieser Platte näherungsweise zum Verschwinden, indem sie daselbst entweder eine kosinusförmige oder eine aus passend gewählten Einzelkräften bestehende reaktive Belastung anbringen.

Die vorerwähnten Lösungen können auch auf eingespannte Kreissektorplatten, zum mindesten auf solche mit bestimmten Zentriwinkeln ausgedehnt werden. Speziell für die eingespannte Halbkreisplatte läßt sich aber auch eine Lösung in geschlossener Form angeben[5], wenn man an Stelle der Polarkoordinaten Bipolarkoordinaten verwendet. Führt man diese letzteren ein, so erscheint es wiederum naheliegend, die Problemstellung zu verallgemeinern, und zwar in einer Weise, die der Eigenart dieses Koordinatennetzes entspricht.

2. Die zwischen zwei Kreisbögen eingespannte Platte mit gleichförmiger Belastung. Die in Abb. 1 dargestellte Platte sei zugleich auf rechtwinklige Koordinaten x, y und auf die Bipolarkoordinaten ξ, η mit den Polen in P_1 und P_2 bezogen. Zwischen den beiden Koordinatenpaaren eines Punktes bestehen dann die bekannten Relationen

$$x = \frac{a \operatorname{Sin} \xi}{\operatorname{Cof} \xi + \cos \eta}, \qquad y = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{Cof} \xi + \cos \eta}. \tag{1}$$

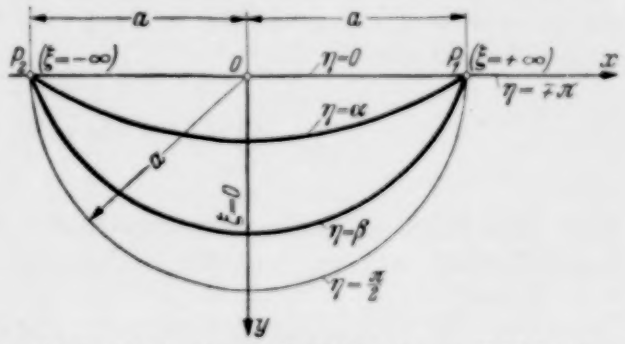

Abb. 1. Die durch zwei Kreisbögen begrenzte Platte im Koordinatensystem.

Ein durch die Gleichung $\eta =$ konst. bestimmter Kreisbogen $P_1 P_2$ hat, wie man sich leicht überzeugt, einen Halbmesser $a/|\sin \eta|$ und einen Zentriwinkel $|2\eta|$. Die durch die Kreisbögen $\eta = \alpha$ und $\eta = \beta$ $(\beta > \alpha)$ begrenzte dünne elastische Platte von konstanter Dicke möge längs ihrer Randlinie eingespannt sein und trage eine gleichförmige Belastung von der Intensität q. Ist ferner D die Biegesteifigkeit der Platte, so hat ihre elastische Fläche der Differentialgleichung

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \tag{2}$$

zu genügen. Der Ausdruck für die Durchbiegung w der Platte möge von der Form

$$w = w_0 + w_1 \tag{3}$$

sein, worin

$$w_0 = \frac{q}{64\,D} (a - x^2 - y^2)^2 \tag{4}$$

eine partikulare Lösung der Gleichung (2) ist und die elastische Fläche einer gleichförmig mit q belasteten eingespannten Kreisplatte, die die Strecke $P_1 P_2$ zu ihrem Durchmesser hat, dar-

[1] *R. Kuno*, J. Soc. Mechanical Engineers of Japan 37 (1934), S. 101.
[2] *H. R. Hassé*, Quarterly J. Mechanics and Applied Mathematics 3 (1950), S. 271.
[3] *H. D. Conway* und *M. K. Huang*, J. Applied Mechanics 19 (1952), S. 5.
[4] *A. Weinstein* und *D. H. Rock*, Quarterly Applied Mathematics 2 (1944), S. 262.
[5] *S. Woinowsky-Krieger*, J. Applied Mechanics 22 (1955), S. 129.

stellt. Indem man nun von den Beziehungen (1) Gebrauch macht, kann man die Gleichung (4) auch in der Form

$$(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)\, w_0 = \frac{q\,a^4}{16\,D}\,\frac{\cos^2\eta}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta} \tag{5}$$

umschreiben.

Die zur Erfüllung der auf $\eta = \alpha, \beta$ vorgeschriebenen Randbedingungen noch erforderliche Zusatzlösung w_1 drücken wir gleich in den Variablen ξ, η aus. Die Funktion w_1 hat dann der homogenen Differentialgleichung

$$\left[(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\right]^2 w_1 = 0 \tag{6}$$

zu genügen. Geht man mit dem Ansatz

$$(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)\, w_{1\lambda} = e^{i\lambda\xi}\varphi_\lambda(\eta)\,, \tag{7}$$

in dem λ eine beliebige reelle Zahl bezeichnet, in die Gleichung (6) ein, so lassen sich die Variablen ξ und η in der Tat trennen, und man erhält für die Funktion $\varphi_\lambda(\eta)$ die Lösung

$$\varphi_\lambda(\eta) = C_1\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\eta\cos\eta + C_2\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\eta\cos\eta + C_3\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\eta\sin\eta + C_4\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\eta\sin\eta\,, \tag{8}$$

wobei die Koeffizienten C_1, C_2, C_3, C_4 zwar nicht von η, wohl aber von dem Parameter λ abhängen. Um schließlich die Funktion w_1 den im unendlichen Bereich $-\infty < \xi < +\infty$ vorgeschriebenen Randbedingungen anzupassen, möge sie in der Form

$$(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)\, w_1 = \int_0^\infty \varphi_\lambda(\eta)\cos\lambda\xi\, d\lambda \tag{9}$$

gewählt werden. Die Funktion $e^{i\lambda\xi}$ des Ansatzes (7) wurde hier durch $\cos\lambda\xi$ ersetzt und zwar mit Rücksicht auf die durch die Art der Belastung bedingte Symmetrie der elastischen Fläche hinsichtlich der Achse $\xi = 0$.

Entwickelt man nun den rechten Teil der Gleichung (5) als eine Funktion von ξ ebenfalls in ein unendliches Integral, indem man von der *Fourier*schen Integralformel Gebrauch macht, so lautet das Ergebnis

$$(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)\, w_0 = \frac{q\,a^4\cos^2\eta}{8\,D\sin\eta}\int_0^\infty \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda\eta\cos\lambda\xi\, d\lambda}{\mathfrak{Sin}\,\lambda\pi}\,. \tag{10}$$

Faßt man jetzt die beiden Lösungsanteile (9) und (10) zusammen, so erhält man für die Gesamtdurchbiegung $w = w_0 + w_1$ die Gleichung

$$(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)\, w = \int_0^\infty \left[\frac{q\,a^4\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\eta\cos^2\eta}{8\,D\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\pi\sin\eta} + \varphi_\lambda(\eta)\right]\cos\lambda\xi\, d\lambda\,, \tag{11}$$

worin für $\varphi_\lambda(\eta)$ noch der Ausdruck (8) einzusetzen wäre. Soll nun die Durchbiegung w auf den beiden Rändern $\eta = \alpha$ und $\eta = \beta$ verschwinden, so müssen zu gleicher Zeit die beiden Gleichungen

$$\left[\frac{q\,a^4\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\eta\cos^2\eta}{8\,D\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\pi\sin\eta} + \varphi_\lambda(\eta)\right]_{\eta=\alpha,\beta} = 0 \tag{12}$$

bestehen.

Um die beiden anderen Randbedingungen in einer passenden Weise zu formulieren, betrachten wir zunächst die zwei Identitäten

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}_\lambda\, w &= \frac{1}{a}\,(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)\,\frac{\partial w}{\partial\eta}\,, \\ \frac{\partial}{\partial\eta}\,[(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)\, w] &= (\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)\,\frac{\partial w}{\partial\eta} - w\sin\eta\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Soll nun längs eines Randes $\eta = \text{konst.}$ neben w auch $\mathrm{grad}_\lambda\, w$ verschwinden, so erweist sich offenbar die Bedingung $\mathrm{grad}_\lambda\, w = 0$, d. h. $\partial w/\partial\eta = 0$ als völlig äquivalent mit der Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\,[(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)\, w] = 0\,. \tag{14}$$

Auf den Ausdruck (11) angewendet, führt die vorstehende Gleichung zu den beiden Randbedingungen

$$\left[\frac{q\,a^4}{8\,D}\,\frac{\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\,\eta\,\cos^2\eta\,\sin\eta-\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\eta\,\cos\eta\,(1+\sin^2\eta)}{\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\pi\,\sin^2\eta}+\frac{d\varphi_\lambda(\eta)}{d\eta}\right]_{\eta=\alpha,\beta}=0\,, \tag{15}$$

die zusammen mit den Gleichungen (12) hinreichen, um die vier in den Ausdruck (8) eingehenden Integrationskonstanten zu bestimmen. Hiernach bestimmt sich auch die elastische Fläche der Platte durch den Ausdruck (3) in Verbindung mit den Gleichungen (4) und (9). Die Biegemomente der Platte ergeben sich schließlich mittels der bekannten Ausdrücke [1]

$$\left.\begin{aligned} m_\xi&=-\frac{D}{a^2}\left[(\mathfrak{Cof}\,\xi+\cos\eta)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right)+(1-\nu)(\mathfrak{Cof}\,\xi+\cos\eta)\left(\mathfrak{Sin}\,\xi\,\frac{\partial w}{\partial\xi}+\sin\eta\,\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)\right],\\ m_\eta&=-\frac{D}{a^2}\left[(\mathfrak{Cof}\,\xi+\cos\eta)^2\left(\nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right)-(1-\nu)(\mathfrak{Cof}\,\xi+\cos\eta)\left(\mathfrak{Sin}\,\xi\,\frac{\partial w}{\partial\xi}+\sin\eta\,\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)\right],\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

in denen ν die Querdehnungszahl bezeichnet.

3. Die eingespannte Kreissegmentplatte unter gleichförmiger Belastung. Die wirkliche Bestimmung der Integrationskonstanten und die Berechnung des größten Biegemomentes soll nur für die Kreissegmentplatte als Beispiel durchgeführt werden; diese sei durch den Kreisbogen $\eta=\beta$ mit dem Zentriwinkel $2\,\beta$ und durch die Gerade $\eta=\alpha=0$ begrenzt (Abb. 2). Das System der Gleichungen (12) und (15) liefert in unserem Fall die folgenden Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} C_1&=-\frac{q\,a^4\,\eta}{8D\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\pi}\,,\\ C_2&=\frac{q\,a^4}{8\,D\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\pi\,\sin\beta}\,\frac{\lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\beta\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\,\beta\,\sin\beta-2\,\mathfrak{Sin}^2\lambda\,\beta\,\cos\beta+\lambda^2\sin^2\beta\,\cos\beta}{\mathfrak{Sin}^2\lambda\,\beta-\lambda^2\sin^2\beta}\,,\\ C_3&=-\lambda\,C_2\,,\\ C_4&=\frac{q\,a^4}{8\,D\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\pi\sin^2\beta}\,\frac{(\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\beta\,\cos\beta-\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\beta\,\sin\beta)^2}{\mathfrak{Sin}^2\lambda\,\beta-\lambda^2\sin^2\beta}\,.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die elastische Fläche der Platte ist also

$$w=\frac{q}{64\,D}(a^2-x^2-y^2)^2+\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\xi+\cos\eta}\int_0^\infty\varphi_\lambda(\eta)\cos\lambda\,\xi\,d\lambda\,, \tag{18}$$

wobei $\varphi_\lambda(\eta)$ durch die Ausdrücke (8) und (17) bestimmt wird. Das größte Biegemoment der Platte entsteht in der Mitte des geraden Randes, also in $\xi=0$, $\eta=0$. Nach Ausführung der vorgeschriebenen Differentiation an der Funktion (18) ergibt sich das betreffende Moment zu

$$m_\eta=\frac{q\,a^2}{16}-\frac{q\,a^2}{2\sin^2\eta}\int_0^\infty\frac{(\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\beta\,\cos\beta-\lambda\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\,\beta\,\sin\beta)^2\,\lambda\,d\lambda}{(\mathfrak{Sin}^2\lambda\,\beta-\lambda^2\sin^2\beta)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\pi}\,. \tag{19}$$

In Abb. 2 ist dieses Einspannmoment im Verhältnis zu dem Wert qf^2, mit $f=a\,\mathrm{tg}\,(\beta/2)$, und in Abhängigkeit von dem halben Zentriwinkel β des Kreisbogens dargestellt.

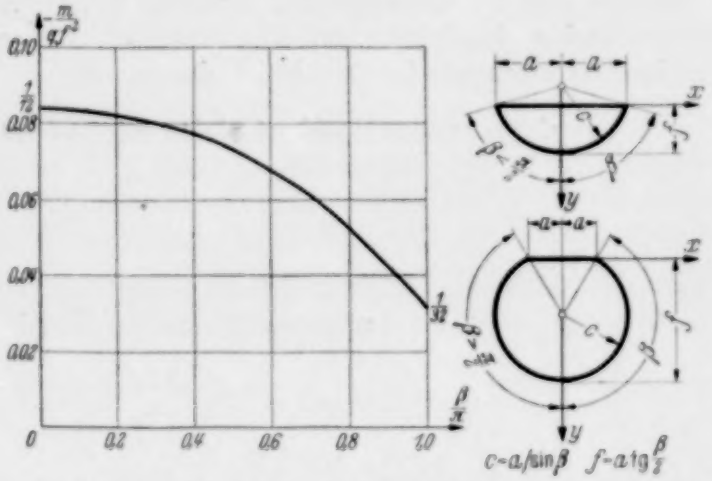

Abb. 2. Das größte in $x=y=0$ wirkende Biegemoment einer gleichförmig belasteten, ringsum eingespannten Kreissegmentplatte in Abhängigkeit vom halben Zentriwinkel β.

4. Die gleichmäßig belastete eingespannte Halbkreisplatte. Die Lösung für die in Abb. 3 dargestellte Halbkreisplatte ergibt sich, indem man $\beta=\pi/2$ setzt, als ein Sonderfall der soeben diskutierten Lösung. Der Ausdruck (18) nimmt sodann die Form

$$w=\frac{q}{64\,D}(a^2-x^2-y^2)^2-\frac{q\,a^4}{8\,D(\mathfrak{Cof}\,\xi+\cos\eta)}\int_0^\infty\frac{\Omega\,\lambda\cos\lambda\,\xi\,d\lambda}{\left(\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\lambda\,\pi}{2}-\lambda^2\right)\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\pi} \tag{20}$$

[1] Vgl. z. B. *W. Flügge*, Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten, S. 15, Berlin 1928.

an, wobei

$$\Omega = \mathfrak{Sin}\left[\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)\right]\left(\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda\pi}{2}\cos\eta + \lambda\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda\pi}{2}\sin\eta\right) - \lambda^2\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\eta\cos\eta \tag{21}$$

sein soll.

Die größte Durchbiegung der Platte entsteht an der Stelle $x = 0$, $y = 0{,}486a$ (bzw. $\xi = 0$, $\eta = 0{,}905$) und ergibt sich zu $0{,}002021\ q\,a^4/D$ in guter Übereinstimmung mit den von *Hassé* und auch von *Conway* und *Huang* berechneten Werten ($0{,}002022$ bzw. $0{,}0020202\ q\,a^4/D$). Das größte aller Biegemomente ist wieder das Einspannmoment in $x = y = 0$ (bzw. $\xi = \eta = 0$). Der von w_0 allein herrührende Anteil ist hier gleich $(1+\nu)\,q\,a^2/16$. Das Glied $\nu\,q\,a^2/16$ hebt sich durch einen gleichwertigen Integralausdruck fort; ersetzt man nun das restliche Glied $q\,a^2/16$ durch das Integral

$$\frac{q\,a^2}{4}\int_0^\infty \frac{\lambda\,d\lambda}{\mathfrak{Sin}\,\lambda\pi}\,,$$

so erhält man im Endergebnis das Einspannmoment

$$m_\eta = -\frac{q\,a^2}{2}\int_0^\infty \frac{(1+\lambda^2)\lambda^3\,d\lambda}{\left(\mathfrak{Sin}^2\,\frac{\lambda\pi}{2}-\lambda^2\right)\mathfrak{Sin}\,\lambda\pi} = -0{,}0731\ q\,a^2\,. \tag{22}$$

Auch die Biegemomente längs der Mittellinie der Platte

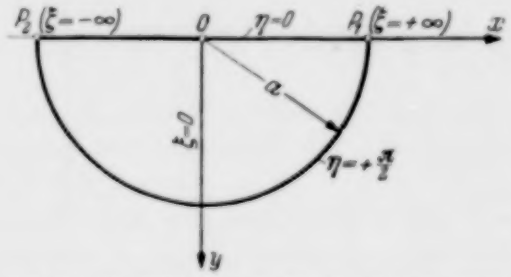

Abb. 3. Die Halbkreisplatte im Koordinatensystem.

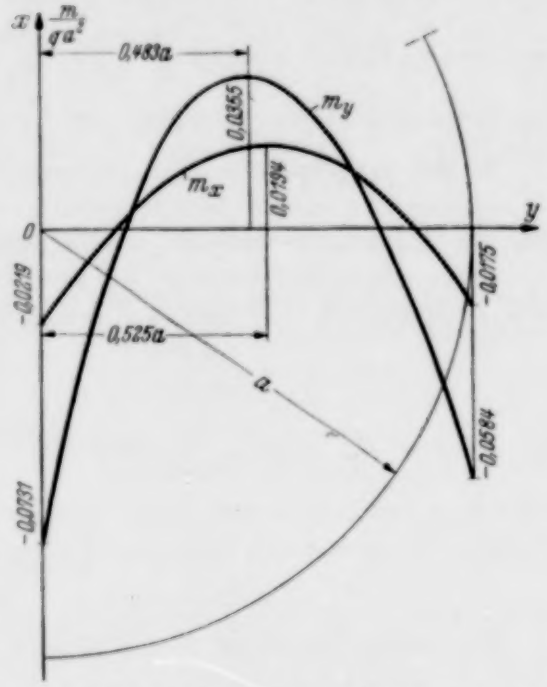

Abb. 4. Der Verlauf der tangentialen ($m_x = m_\xi$) und der radialen ($m_y = m_\eta$) Biegemomente längs der Mittellinie einer eingespannten Halbkreisplatte bei gleichförmiger Belastung ($\nu = 0{,}3$).

($x = 0$ bzw. $\xi = 0$) lassen sich nach den allgemeinen Formeln (16) leicht ermitteln. Auf die Wiedergabe der betreffenden Ausdrücke sei hier verzichtet. Der Verlauf der unter der Annahme $\nu = 0{,}3$ berechneten Momente ist in Abb. 4 dargestellt.

5. Die eingespannte Halbkreisplatte mit hydrostatischer Belastung. Die Halbkreisplatte (Abb. 3) trage nun eine nach dem Gesetz

$$p = \frac{q_0\,y}{a}\,, \tag{23}$$

verteilte Belastung, worin q_0 eine Konstante ist. Die Lösung der Differentialgleichung $\Delta\Delta w = (q_0 y)/(a\,D)$ möge jetzt, der Annahme (3) entsprechend, in der Form

$$w = w_0 + w_1 = \frac{q_0\,y\,(a^2-x^2-y^2)^2}{192\,a\,D} + \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\xi+\cos\eta}\int_0^\infty \varphi_\lambda(\eta)\cos\lambda\xi\,d\lambda \tag{24}$$

angesetzt werden. Die Durchbiegungen w_0 verschwinden nunmehr längs der gesamten Randlinie der Platte, ebenso wie der $\mathrm{grad}_\eta\, w_0$ auf dem Kreisbogen. Auf dem geraden Rande hat man dagegen

$$\mathrm{grad}_\eta\, w_0 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{q_0\,(a^2-x^2)^2}{192\,a\,D} = \frac{q_0\,a^3}{48\,D\,(\mathfrak{Cof}\,\xi+1)^2} \tag{25}$$

oder, wie dies aus den Beziehungen (13) folgt,

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mathfrak{Cof}\,\xi+\cos\eta)\,w_0\right] = \frac{q_0\,a^4}{48\,D\,(\mathfrak{Cof}\,\xi+1)^2} = \frac{q_0\,a^4}{72\,D}\int_0^\infty \frac{(\lambda^2+1)\lambda\cos\lambda\xi\,d\lambda}{\mathfrak{Sin}\,\lambda\pi}\,, \tag{26}$$

wenn man die Funktion $(\mathfrak{Cof}\,\xi+1)^{-2}$ zum Schluß noch durch ein gleichwertiges Integral ersetzt.

Die Randbedingung $\operatorname{grad}_\eta w = 0$ oder, was dasselbe ist,

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[(\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta)\,(w_0 + w_1)\right] = 0 \tag{27}$$

auf $\eta = 0$ läßt sich nun auf Grund der Gleichungen (24) und (26) in der Form

$$\left[\frac{q_0\,a^4\,(\lambda^2+1)\,\lambda}{72\,D\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\pi} + \frac{d\varphi_\lambda(\eta)}{d\eta}\right]_{\eta=0} = 0 \tag{28}$$

schreiben. Die drei weiteren Randbedingungen sind offenbar

$$[\varphi_\lambda(\eta)]_{\eta=0} = 0\,, \quad [\varphi_\lambda(\eta)]_{\eta=\frac{\pi}{2}} = 0\,, \quad \left[\frac{d\varphi_\lambda(\eta)}{d\eta}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0\,. \tag{29}$$

Die Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4 im Ausdruck (8) für die Funktion $\varphi_\lambda(\eta)$ lassen sich aus dem System der Gleichungen (28), (29) sofort bestimmen. Der Ausdruck (24) formt sich dann um in

$$w = \frac{q_0\,y\,(a^2-x^2-y^2)^2}{192\,a\,D} - \frac{q_0\,a^4}{72\,D\,(\mathfrak{Cof}\,\xi+\cos\eta)}\int_0^\infty \frac{\Omega_0\,(\lambda^2+1)\,\lambda\cos\lambda\,\xi\,d\lambda}{\left(\mathfrak{Sin}^2\frac{\lambda\,\pi}{2} - \lambda^2\right)\mathfrak{Sin}\,\lambda\pi} \tag{30}$$

mit

$$\Omega_0 = \mathfrak{Sin}\left[\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)\right]\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda\,\pi}{2}\sin\eta - \lambda\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\,\eta\cos\eta\,. \tag{31}$$

Das absolut größte Biegemoment der Platte tritt jedenfalls an einem Ende ihrer Mittellinie $x = 0$ auf. Für das Einspannmoment in der Mitte des geraden Randes ($y = 0$ bzw. $\eta = 0$) findet man den Wert

$$m_\eta = -\frac{q_0\,a^2}{36}\int_0^\infty \frac{(\lambda^2+1)\lambda^2\,d\lambda}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\lambda\,\pi}{2} - \lambda^2} = -\,0{,}0276\,q_0\,a^2 \tag{32}$$

und für das Einspannmoment in der Mitte des Halbkreisbogens $\left(y = a \text{ bzw. } \eta = \frac{\pi}{2}\right)$ den Wert

$$m_\eta = -\frac{q_0\,a^2}{24} + \frac{q_0\,a^2}{72}\int_0^\infty \frac{(\lambda^2+1)\lambda^3\,d\lambda}{\left(\mathfrak{Sin}^2\frac{\lambda\,\pi}{2} - \lambda^2\right)\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda\,\pi}{2}} = -\,0{,}0355\,q_0\,a^2\,. \tag{33}$$

Für die zugehörigen Momente m_ξ gilt die einfache Formel $m_\xi = \nu\,m_\eta$.

6. Die zwischen zwei zueinander exzentrischen Kreislinien eingespannte Platte. In grundsätzlich ähnlicher Weise wie das Bogenzweieck läßt sich das in Abb. 5 dargestellte ringförmige Gebiet, etwa bei gleichförmiger Belastung, behandeln. Sind die Halbmesser der beiden Kreise und die Exzentrizität gegeben, so erhält man den zugehörigen halben Polabstand a, die Lage der Pole zu den Kreisen und die Gleichungen der Plattenränder in Bipolarkoordinaten nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{[(c+d)^2-e^2]\,[(c-d)^2-e^2]}{4\,e^2}\,,\\ x_d &= \sqrt{a^2+d^2}\,,\\ \xi &= \gamma = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{a}{c}\,, \quad \xi = \delta = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{a}{d}\,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

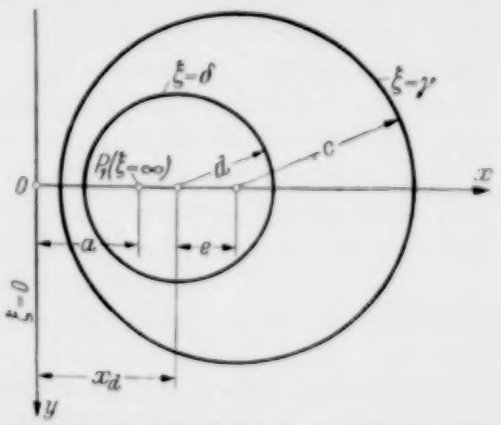

Abb. 5. Die Kreisringplatte im Koordinatensystem.

Im Ansatz (3) für die Durchbiegung der Platte möge w_0 wieder von der Form (4) bzw. (5) sein, und die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung (6) in der Form

$$w_{1m} = \frac{e^{i\,m\,\eta}}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta}\,\varphi_m(\xi) \tag{35}$$

gewählt werden, worin unter m eine ganze Zahl zu verstehen ist. Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (6) ein, so ergibt sich für $m \neq 0$

$$\varphi_m(\xi) = C_1\,\mathfrak{Cof}\,(m+1)\,\xi + C_2\,\mathfrak{Sin}\,(m+1)\,\xi + C_3\,\mathfrak{Cof}\,(m-1)\,\xi + C_4\,\mathfrak{Sin}\,(m-1)\,\xi \tag{36}$$

und für $m = 0$

$$\varphi_0(\xi) = C_1 \operatorname{Cof} \xi + C_2 \operatorname{Sin} \xi + C_3 \xi \operatorname{Cof} \xi + C_4 \xi \operatorname{Sin} \xi . \tag{37}$$

Die Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3, C_4 dieser Ausdrücke sind wiederum abhängig von der jeweiligen Zahl m.

Da die Funktion $w_1(\eta)$ nicht nur periodisch, sondern mit Rücksicht auf die angenommene Lastverteilung auch symmetrisch zu dem Durchmesser $\eta = 0$ sein muß, so bleibt sie auf die Kosinusglieder in η beschränkt, d. h. man hat

$$(\operatorname{Cof} \xi + \cos \eta)\, w_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\xi) \cos m \eta \tag{38}$$

anzusetzen. Entwickelt man die Funktion (5) in der analogen Weise, so findet man

$$(\operatorname{Cof} \xi + \cos \eta)\, w_0 = \frac{q\, a^4 \operatorname{Cof}^2 \xi}{8\, D \operatorname{Sin} \xi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\, e^{-m\xi} \cos m \eta \right]. \tag{39}$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die zu jedem m gehörigen vier Konstanten C_i in den Ausdrücken (36) und (37) aus den Randbedingungen

$$(\operatorname{Cof} \xi + \cos \eta)\, (w_0 + w_1) = 0 , \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [(\operatorname{Cof} \xi + \cos \eta)\, (w_0 + w_1)] = 0 \tag{41}$$

auf $\xi = \gamma$ und $\xi = \delta$ zu bestimmen, indem man mit den Lösungen (38) und (39) in diese Bedingungen eingeht. Es ist hierbei zu bemerken, daß wegen der Randbedingung (40) die Bedingung (41) gleichwertig mit $\operatorname{grad}_\xi w = 0$ wird; dies ist aus den Gleichungen (13) sofort ersichtlich, wenn man das Differentiieren dort nach ξ anstatt nach η ansetzt. Sind schließlich die Konstanten C_i ermittelt, so ist auch die elastische Fläche der Platte durch den Ausdruck

$$w = \frac{q}{64\, D} (a^2 - x^2 - y^2)^2 + \frac{1}{\operatorname{Cof} \xi + \cos \eta} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\xi) \cos m \eta \tag{42}$$

endgültig bestimmt. Im Falle einer hinsichtlich der x-Achse antimetrisch, etwa nach dem Gesetz $p = (q_0\, y)/a$, verteilten Belastung wäre die Kosinus-Reihe in Ansatz (38) durch eine Sinus-Reihe zu ersetzen, im übrigen würde sich aber an dem ganzen Vorgang nichts ändern.

(Eingegangen am 20. Juni 1955.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *S. Woinowsky-Krieger*, Quebec 6, Que, (Canada) 200 Ave. Marguerite Bourgeoys Apt. 8.

Das Stabilitätsverhalten der nichtlinearen Biegeschwingungen des axial pulsierend belasteten Stabes.

Von **F. Weidenhammer.**

1. Einleitung. Der axial pulsierend belastete Stab ist das bevorzugte Modell für zahlreiche Untersuchungen [1] des Stabilitätsverhaltens elastischer Körper unter schwingenden äußeren Lasten. Dabei untersucht man mit der Methode der kleinen Schwingungen die Stabilität der gestreckten Lage des Stabes, abhängig von der Amplitude der schwingenden Längslast und deren Frequenz. Bei technischen Fragestellungen liegt dabei der pulsierende Lastanteil weit unterhalb der Knicklast und auch Längsschwingungen merklicher Amplitude werden im Stab nicht erregt. Unter diesen Voraussetzungen sind diejenigen Frequenzen leicht anzugeben, bei welchen der Stab in seiner gestreckten Lage instabil in bezug auf eine Querauslenkung wird. Die meisten Untersuchungen beschränken sich dabei auf beidseitig momentenfrei und quer zur Stabachse unverschieblich gelagerte Stäbe, und dieser Lagerungsfall soll auch in der vorliegenden Arbeit ausschließlich betrachtet werden. Ein Lager sei ferner in Längsrichtung verschieblich (Abb. 1) und die Kreisfrequenz ω der pulsierenden Axiallast bleibe weit unterhalb der tiefsten Eigenfrequenz der Längsschwingungen. Dann findet man durch eine Stabilitätsbetrachtung, daß die gestreckte Lage instabil wird, wenn die Längserregungsfrequenzen in der Nähe der speziellen Werte

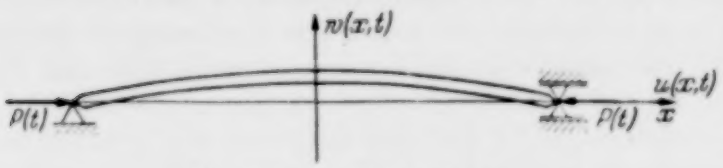

Abb. 1. Der Stab im Koordinatensystem.

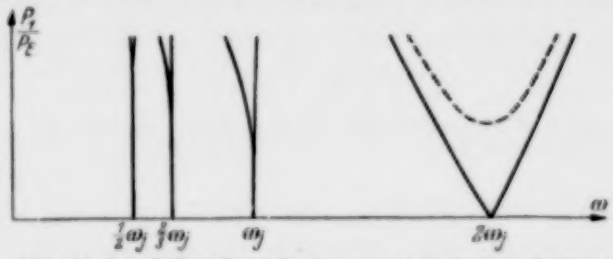

Abb. 2. Instabilitätsbereiche bis zur 4. Ordnung. Ordinate: Verhältnis des pulsierenden Längslastanteiles zur Knicklast. Verkleinerung der Bereiche durch Dämpfung: — — —.

$$\omega_0 = \frac{2\,\omega_j}{p} \quad (p = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

liegen [2]. In (1) bezeichnet ω_j $(j = 1, 2, \ldots)$ jeweils eine Eigenfrequenz der Biegeschwingungen des Stabes, und es gibt zu jeder Eigenfrequenz gemäß den Ordnungszahlen p eine Folge von Werten ω_0, die jeder zu einem ganzen Bereich von Werten der Frequenz ω führen, welche Instabilität der gestreckten Stablage zur Folge haben (Abb. 2). Auf Grund der größeren Frequenzbreite der Bereiche erster Ordnung $(p = 1)$ und der hier am wenigsten stabilisierend wirkenden Dämpfungskräfte sind diese Bereiche am wichtigsten, wie man aus Abb. 2 entnehmen kann. Im weiteren soll daher nur das Schwingungsverhalten des Stabes in der Nähe der Frequenzen $\omega_0 = 2\,\omega_j$ genauer untersucht werden. Bei diesen Längserregungsfrequenzen ist die gestreckte Stablage nicht stabil, und der Stab wird nach einer anfänglichen, kleinen Querauslenkung in Querschwingungen endlicher Amplitude übergehen. Die zugehörige Frequenz-Amplitudengleichung der dann eintretenden nichtlinearen Biegeschwingungen ist für den ungedämpft schwingenden Stab bekannt [3] und ist in Abb. 3 für einen konstanten Wert der Längserregungsamplitude als Resonanzkurve aufgetragen. Als Amplitude ist dabei der *Fourier*koeffizient überwiegender Größe der nichtlinearen Schwingung bezeichnet und diese Amplitude wird in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz betrachtet. Der gestrichelt eingezeichnete Ast der Resonanzkurve hat keine physikalische Bedeutung, da er einer instabilen Schwingung zugehört und also nicht beobachtet werden kann.

Über die soeben aufgezählten bekannten Ergebnisse hinausgehend werden in der vorliegenden Arbeit folgende Probleme behandelt:

α) Einschwingvorgänge. Um einen tieferen Einblick in das Stabilitätsverhalten des Stabes zu erhalten, werden nicht nur die nach einer Anfangsstörung schließlich eintretenden stationären Schwingungen untersucht, sondern es werden auch die Übergangsschwingungen in diese End-

[1] Vgl. das umfangreiche Literaturverzeichnis bei *E. Mettler*, Publ. sci. techn. Min. Air. Paris 281 (1953), S. 77.

[2] Vgl. z. B. *E. Mettler*, Mitt. Forsch. Anst. GHH-Konzern 8 (1940), S. 1.

[3] *F. Weidenhammer*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 315.

zustände hinein berechnet. Dadurch kann man die bisher offene Frage beantworten, ob ein Stab bei einer Längserregungsfrequenz $\omega > 2\,\omega_j$ in stationäre Querschwingungen übergeht oder in die Ruhelage zurückschwingt. Die bisherigen Untersuchungen haben lediglich für diese Längserregungsfrequenz sowohl die Ruhelage (Amplitude $A = 0$ in Abb. 3) als auch Querschwingungen ($A \neq 0$ in Abb. 3) als mögliche stabile Bewegungsformen erkannt, konnten jedoch die nun gefundene Abhängigkeit von der Anfangsstörung nicht aufdecken. Die in diesen Fragenkreis neu eingeführte Lösungsmethode der „langsam veränderlichen Phase und Amplitude" erweist sich dabei als sehr zweckmäßig[1].

β) **Einbeziehung dämpfender Kräfte.** Auch bei der Berechnung gedämpfter Schwingungen bewährt sich diese Methode, denn der bei gedämpften Schwingungen schwierige Stabilitätsnachweis kann damit leicht über die *H. Poincaré*sche Singularitätentheorie geführt werden. So findet man, daß dämpfende Kräfte eine ganz im Endlichen verlaufende Resonanzkurve mit einer endlichen Größtamplitude bedingen, wie dies von erzwungenen Schwingungen mit Dämpfung her bekannt ist.

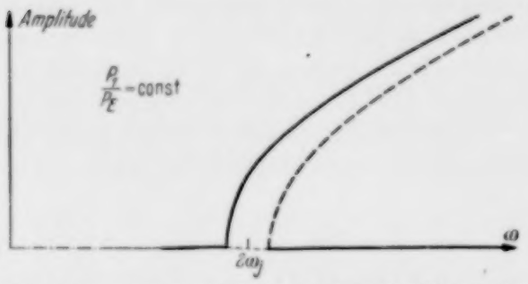

Abb. 3. Resonanzkurve für den ungedämpft schwingenden Stab. Stabile Äste: ———, instabile Äste: — — —.

γ) **Berechtigung der Näherungsrechnung.** Da das Schwingungsverhalten des Stabes durch komplizierte nichtlineare partielle Differentialgleichungen beschrieben wird, ist man auf eine Näherungsrechnung angewiesen. In dieser führt man üblicherweise die Diskussion des Schwingungsverhaltens des Stabes an einem Schwinger mit nur einem Freiheitsgrad durch. Es ist daher wesentlich, nachzuweisen, daß sich die bisher gefundenen Schwingungseigenschaften auch in einer sehr verbesserten Näherungsrechnung wiederfinden, in der man den Stab als System mit mehreren, jedoch endlich vielen Freiheitsgraden behandelt.

Die Untersuchung beschränkt sich auf kleine Nichtlinearitäten und kleine pulsierende Längslasten mit Frequenzen weit unterhalb der Längsresonanzen. Auch wird stets mit einem linearen *Hooke*schen Werkstoffgesetz gerechnet, so daß Nichtlinearitäten nur auf Grund der Kopplung von Längs- und Querverschiebungen in die Rechnung eingehen. Die genannten Einschränkungen dürften jedoch bei einem Stab als Bauglied in der Technik von selbst gegeben sein.

Bei einem Stab mit komplizierterer Lagerung (z. B. eingespannten Enden) treten Instabilitäten der gestreckten Lage zusätzlich bei den Frequenzen $\omega_0 = (\omega_j + \omega_k)/p$ $(j = 1, 2, \ldots;$ $k = 1, 2, \ldots;$ $j \neq k;$ $p = 1, 2, \ldots)$ auf. Derartige Instabilitäten zweiter Art können jedoch im Falle momentenfreier Lagerung der Stabenden nicht auftreten, so daß die vorliegende Untersuchung zur Lösung des schwierigen Problems[2] der Instabilitäten zweiter Art keinen Beitrag geben kann.

2. Ausgangsgleichungen. Die Bewegungsgleichungen des Stabes lassen sich zweckmäßig aus dem *Hamilton*schen Prinzip herleiten:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (A_i + V - T)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A\, dt = 0\,, \tag{2}$$

worin A_i die Formänderungsarbeit, V das Potential der äußeren Kräfte, T die Bewegungsenergie und δA die virtuelle Arbeit der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskräfte bezeichnen. Mit den Annahmen der technischen Biegelehre ist[3]:

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \frac{EF}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right)^2 dx + \frac{EJ}{2} \int_{-l/2}^{l/2} w_{xx}^2\, dx\,, \qquad V = P(t)\, u(l/2)\,, \\ T &= \frac{\mu}{2} \int_{-l/2}^{l/2} (u_t^2 + w_t^2)\, dx\,, \qquad \delta A = \int_{-l/2}^{l/2} \beta\, w_t\, \delta w\, dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hierin bezeichnen x die Ortskoordinate, $u(x, t)$, $w(x, t)$ die gesuchten Verschiebungskomponenten in Stablängsrichtung und quer zur Stabachse, t die Zeit, J = konst. das für die Biegeschwingung

[1] Vgl. für die entsprechende Fragestellung bei erzwungenen Schwingungen *Ch. Hayashi*, Forced Oscillations in non-linear Systems, S. 81, Osaka (Japan) 1953.

[2] Vgl. *E. Mettler*, Ing.-Arch., 23 (1955), S. 354.

[3] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 97.

maßgebende Flächenträgheitsmoment, $F =$ konst. die Querschnittfläche des Stabes, $\mu =$ konst. die Stabmasse je Längeneinheit, l die Stablänge, E den Elastizitätsmodul, $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$ die rein harmonisch pulsierende Axiallast, so daß $P(t) > 0$ Längsdruck auf den Stab bezeichnet, β die Dämpfungskonstante der Biegeschwingungen.

Durch Ausführung der in (2) verlangten Variationen erhält man für die Verschiebungen u und w ein gekoppeltes System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen mit zeitabhängigen Randbedingungen, deren strenge Lösung kaum möglich erscheint. Zum näherungsweisen Studium des Zeitverhaltens werden daher die „gemischten *Ritz*ansätze"

$$u(\xi, \tau) = \sqrt{3}\left(\xi + \frac{1}{2}\right) u_{max}\, U(\tau)\,, \tag{4}$$

$$w(\xi, \tau) = w_{max} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{2} \sin j\pi \left(\xi + \frac{1}{2}\right) W_j(\tau) \tag{5}$$

mit vorgegebenen Ortsfunktionen und aus dem Variationsproblem zu bestimmenden Zeitfunktionen $U(\tau)$, $W_j(\tau)$ in (2) eingeführt.

Dabei bezeichnen u_{max} und w_{max} die Beträge der größten vorkommenden Verschiebungen, so daß im folgenden die Größenordnungen der Nichtlinearitäten erkennbar werden. In den Ansätzen (4) und (5) ist die Längsverschiebung u als nicht wesentlich interessierend nur grob eingliedrig angenähert, während für die Querverschiebung w ein N-gliedriger Ansatz mit den alle Randbedingungen erfüllenden Eigenfunktionen des Stabes eingeführt wurde. Ferner ist die Zeitzählung und die Ortskoordinate durch

$$\tau = \omega t\,, \qquad \xi = \frac{x}{l}$$

dimensionslos gemacht. Mit den Ansätzen (4) und (5) ist (2) nur noch eine Variationsaufgabe für die Zeitfunktionen U und W_j allein und als zugehörige *Euler*sche Gleichungen findet man nach einiger Rechnung[1]

$$\varkappa^2 \frac{u_{max}}{l} U'' + 3\frac{l\, u_{max}}{i_F^2} U + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{w_{max}}{i_F}\right)^2 \sum_{k=1}^{N} \psi_{kk} W_k^2 = -P(t)\frac{\sqrt{3}\, l^2}{EJ}\,, \tag{6}$$

$$\varkappa^2 W_j'' + \frac{2}{\pi}\vartheta_j \varkappa_j \varkappa W_j' + \varkappa_{jj}^2 W_j + \sqrt{3}\frac{l\, u_{max}}{i_F^2} U \psi_{jj} W_j + \frac{1}{2}\left(\frac{w_{max}}{i_F}\right)^2 \sum_{k,m,n=1}^{N} \chi_{jkmn} W_k W_m W_n = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{7}$$

Hierin bezeichnen:

$$\varkappa = \frac{\omega}{\sqrt{EJ/\mu\, l^4}}$$

die Längsanregungsfrequenz in einem dimensionslosen Maß,

$$\varkappa_j = j^2\pi^2\sqrt{1 - \frac{P_0}{j^2 P_E}} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

mit der *Euler*schen Knicklast $P_E = EJ\pi^2/l^2$ die Biegeeigenfrequenzen des ungedämpft schwingenden Stabes im gleichen Maß,

$$\vartheta_j = \frac{\beta\pi}{2\mu\varkappa_j\sqrt{EJ/\mu\, l^4}}$$

die mit den ungedämpften Eigenfrequenzen berechneten Dämpfungsdekremente und

$$i_F = \sqrt{\frac{J}{F}}$$

den Flächenträgheitsradius, während Punkte nun für Ableitungen nach der dimensionslosen Zeit τ stehen. Ferner kommen in (6) und (7) die Zahlenwerte

$$\psi_{jj} = j^2\pi^2\,, \qquad \varkappa_{jj}^2 = j^4\pi^4 \qquad (j = 1, 2, \ldots N) \tag{8}$$

und

$$\chi_{jkmn} = 4\pi^4 \int_{-1/2}^{1/2} \prod_{p=j,k,m,n} p \cos p\pi\left(\xi + \frac{1}{2}\right) d\xi \qquad (j, k, m, n = 1, 2, \ldots, N)$$

[1] Vgl. S. 317—320 der in Fußnote 3 auf S. 53 genannten Arbeit.

vor. Offenbar ist

$$\chi_{iiii} = 4\,\pi^4\,\frac{3}{8}\,j^4 \quad \text{und} \quad \chi_{jkmn} = 0\,, \tag{9}$$

wenn nicht mindestens zweimal zwei Zeigerwerte in beliebiger Reihenfolge übereinstimmen. Ferner folgt aus (8) und (9):

$$\chi_{iiii} - \psi_{jj}^2 = j^4\,\frac{\pi^4}{2} > 0\,,$$

was später gebraucht werden wird. Da die Längserregungsfrequenz in (6) voraussetzungsgemäß weit unterhalb der ersten Längseigenfrequenz ($\varkappa \ll \varkappa_L \approx \sqrt{3}\,l/i_F$) bleiben soll, kann man das Trägheitsglied in der Gleichung für die Längsschwingungen näherungsweise vernachlässigen. Dann kann aus (6) und (7) $U(\tau)$ ganz eliminiert werden und man erhält ein System von homogenen, nichtlinearen Schwingungsgleichungen für die Zeitfunktionen $W_j(\tau)$ allein:

$$q_j^2\,W_j'' + \varepsilon\,\beta_j\,q_j\,W_j' + W_j\left(1 - \varepsilon\,\alpha_j\cos\tau + \varepsilon\,\gamma_{jj}\,W_j^2 + \varepsilon\sum_{\substack{k=1\\ \neq j}}^{N}\gamma_{jk}\,W_k^2\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, N)\,, \tag{10}$$

worin die Abkürzungen

$$q_j = \frac{\varkappa}{\varkappa_j}\,, \qquad \beta_j = \frac{2}{\pi}\,\frac{\vartheta_j}{\varepsilon}\,, \qquad \varepsilon = \frac{P_1}{P_E} \ll 1\,, \tag{11, 1—3}$$

$$\alpha_j = \frac{\pi^2\,\psi_{jj}}{\varkappa_j^2}\,, \tag{11, 4}$$

$$\gamma_{jj} = \left(\frac{w_{max}}{i_F}\right)^2 \frac{\chi_{jjjj} - \psi_{jj}^2}{2\,\varkappa_j^2}\,\frac{1}{\varepsilon} > 0\,, \tag{11, 5}$$

$$\gamma_{jk} = \left(\frac{w_{max}}{i_F}\right)^2 \frac{3\,\chi_{jjkk} - \psi_{jj}\,\psi_{kk}}{2\,\varkappa_j^2}\,\frac{1}{\varepsilon} \tag{11, 6}$$

verwendet werden. In (10) sind kleine Glieder durch den kleinen Parameter $\varepsilon = P_1/P_E$ kenntlich gemacht, denn der pulsierende Lastanteil P_1 wird in der Technik stets sehr klein im Vergleich mit der *Euler*schen Knicklast sein, so daß $\varepsilon \ll 1$ ist. Während die Vorfaktoren der nichtlinearen Glieder klein sind wegen der überhaupt nur zugelassenen kleinen Maximalamplituden ($w_{max}/i_F \ll 1$), ist die Dämpfung meist nur durch die sehr kleine Werkstoffdämpfung gegeben, so daß das zugehörige Dekrement ebenfalls klein ist:

$$\vartheta_j = \frac{\pi}{2}\,\varepsilon\,\beta_j \ll 1\,.$$

Die Gleichungen (10) sind die grundlegenden Schwingungsgleichungen, aus denen heraus das Schwingungsverhalten des Stabes diskutiert werden soll. Die Besonderheit der zu untersuchenden Klasse von Schwingungen kommt in den Gleichungen (10) formal dadurch zum Ausdruck, daß die Erregung nur über periodisch veränderliche Koeffizienten in die Schwingungsgleichungen eingeht und daß diese Gleichungen homogen sind und demnach stets auch die Lösungen $W_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ zulassen. Dieser Schwingungstyp wurde von *K. Klotter*[1] rheonichtlinear genannt, während sich neuerdings die von *N. Minorsky*[2] gewählte Bezeichnung dieser Schwingungen als parametererregt durchzusetzen scheint. Jedenfalls handelt es sich um einen speziellen Typ erzwungener Schwingungen, der sich durch sein ganz andersartiges Resonanzverhalten von den viel behandelten erzwungenen Schwingungen des *Duffing*schen Problemes[3] unterscheidet.

3. Einführung der Methode der langsam veränderlichen Phase und Amplitude. Bei der Untersuchung der stationären Schwingungen in der Nähe einer Längserregungsfrequenz $\omega_0 = 2\,\omega_j$ kann man sich auf die Diskussion der j-ten Schwingungsgleichung des Systems (10) allein beschränken, wie in Abschn. **6** gezeigt werden wird. Die Einschwingvorgänge sollen daher ebenfalls aus dieser Einzelgleichung allein berechnet werden. Daher wird in (10) für einen festen Zeigerwert j (etwa $j = 1$ für die Grundschwingung) $W_j(\tau) \not\equiv 0$, $W_k \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots, N, \neq j)$ gesetzt, und die dann

[1] *K. Klotter*, Techn. Schwingungslehre, Bd. 1, S. 350, 2. Aufl., Berlin 1951.
[2] *N. Minorsky*, Introduction to non-linear Mechanics, S. 355, Ann Arbor 1947.
[3] Vgl. z. B. S. 337 des in Fußnote 1 genannten Buches von *K. Klotter*.

verbleibende Schwingungsgleichung unter Fortlassung des Index j einfacher

$$q^2 W'' + \varepsilon \beta q W' + W(1 - \varepsilon \alpha \cos \tau + \varepsilon \gamma W^2) = 0 \tag{12}$$

geschrieben. Aus dieser nichtlinear ergänzten *Mathieu*schen Differentialgleichung heraus sollen die in Abschn. 1 gestellten Fragen α) und β) beantwortet werden, wozu die Methode der langsam veränderlichen Phase und Amplitude in der von *B. v. d. Pol*[1] angegebenen Form verwendet wird. Diese Methode gestattet für kleine Parameter ε die durch (12) beschriebenen periodischen Schwingungen näherungsweise zu berechnen. Darüberhinaus vermag sie auch einen Einblick in jene fastperiodischen Schwingungsbewegungen zu geben, die in unmittelbarer Nachbarschaft der stationären, periodischen Schwingungen verlaufen. Die Methode ist daher geeignet, zu entscheiden, welche der beiden stabilen Bewegungsformen der Stab annimmt, wenn für Frequenzen $\omega > 2\,\omega_j$ sowohl die (periodischen) Bewegungen $W \equiv 0$ als auch $W \not\equiv 0$ möglich sind.

Da für die zu untersuchenden Frequenzen $q \approx 2$ ist, wird zur näherungsweisen Lösung von (12) $W(\tau)$ mit $\cos \tau/2$- und $\sin \tau/2$-Funktionen von der halben Frequenz der Erregung in der Form

$$W(\tau) = A(\tau) \cos \frac{\tau}{2} + B(\tau) \sin \frac{\tau}{2} \tag{13}$$

angesetzt, worin $A(\tau)$ und $B(\tau)$ noch aus (12) zu bestimmende Funktionen bezeichnen. Da diese Funktionen durch den Ansatz (13) und die eine Differentialgleichung (12) noch nicht vollständig festgelegt sind, wird die Differentialgleichung

$$A' \cos \frac{\tau}{2} + B' \sin \frac{\tau}{2} = 0 \tag{14}$$

als Nebenbedingung zur Ausgangsdifferentialgleichung (12) hinzugefügt. Dadurch erhält W' einfach die Form

$$W' = -\frac{A}{2} \sin \frac{\tau}{2} + \frac{B}{2} \cos \frac{\tau}{2}$$

und wird damit frei von Summanden A' und B', die erst in der Beschleunigung W'' vorkommen. Somit liefert die Nebenbedingung (14) wesentlich die Spezialisierung auf Schwingungen mit langsam veränderlicher Phase und Amplitude. Weiter wird die vorausgesetzte Kleinheit der Dämpfungskraft, der Längserregung und der Nichtlinearität durch die Umschreibung der Differentialgleichung (12) in die Form

$$q^2 W'' + W = \varepsilon (-q \beta W' + \alpha \cos \tau\, W - \gamma W^3) \tag{15}$$

mit dem Größenordnungsfaktor ε sichtbar gemacht. Trägt man nun den Ansatz (13) in (15) ein, so kommen rechtzeitig auf Grund der Nebenbedingung (14) keine Zeitableitungen von A und B mehr vor und man erhält für die gesuchten Funktionen A und B die Differentialgleichung

$$-\frac{q^2}{2} A' \sin \frac{\tau}{2} + \frac{q^2}{2} B' \cos \frac{\tau}{2} = A\left(\frac{q^2}{4} - 1\right) \cos \frac{\tau}{2} + B\left(\frac{q^2}{4} - 1\right) \sin \frac{\tau}{2} + \varepsilon F(A, B, \tau)\,, \tag{16}$$

worin F die Funktion

$$F(A, B, \tau) = -q\beta\left(-\frac{A}{2} \sin \frac{\tau}{2} + \frac{B}{2} \cos \frac{\tau}{2}\right) + \alpha \cos \tau \left(A \cos \frac{\tau}{2} + B \sin \frac{\tau}{2}\right) - \gamma \left(A \cos \frac{\tau}{2} + B \sin \frac{\tau}{2}\right)^3$$

bezeichnet. Da das Frequenzverhältnis $q \approx 2$ ist, darf für $q^2/4 - 1 \doteq 0(\varepsilon)$ vorausgesetzt werden, so daß alle rechtzeitig vorkommenden Summanden die Größenordnung ε nicht übersteigen. Durch Auflösung der Gleichungen (14) und (16) nach A' und B' ergibt sich nun

$$\left.\begin{aligned} \frac{q^2}{2} A' &= -A\left(\frac{q^2}{4} - 1\right) \cos \frac{\tau}{2} \sin \frac{\tau}{2} - B\left(\frac{q^2}{4} - 1\right) \sin^2 \frac{\tau}{2} - \varepsilon F(A, B, \tau) \sin \frac{\tau}{2}\,, \\ \frac{q^2}{2} B' &= A\left(\frac{q^2}{4} - 1\right) \cos^2 \frac{\tau}{2} + B\left(\frac{q^2}{4} - 1\right) \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} + \varepsilon F(A, B, \tau) \cos \frac{\tau}{2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Dieses nichtlineare Differentialgleichungssystem (17) ist zufolge seiner expliziten Abhängigkeit von der Zeit schwer zugänglich. Es ist daher wesentlich, daß man stationäre und auch Übergangsschwingungen aus dem zugeordneten zeitfreien System näherungsweise berechnen kann. Zum Übergang auf das zeitfreie System werden die Gleichungen (17) rechtseitig über eine Periode 4π gemittelt und dabei A, B wie Konstante behandelt. Anschaulich ist durchaus verständlich, daß man

[1] Vgl. z. B. *A. A. Andronow* u. *C. E. Chaikin*, Theory of Oscillations, S. 302, Princeton 1949.

auf diese Weise zu einer brauchbaren Näherung gelangen kann, da ja schwachveränderliche $A(\tau)$ und $B(\tau)$ berechnet werden sollen und diese Funktionen in den kleinen Summanden der rechten Seiten ohne wesentlichen Fehler für die Dauer einer Periode als konstant angesehen werden können. Für diese Mittelbildung hat man die in

$$\frac{q^2}{2} A' = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left[-A\left(\frac{q^2}{4} - 1\right) \cos\frac{\tau}{2} \sin\frac{\tau}{2} - B\left(\frac{q^2}{4} - 1\right) \sin^2\frac{\tau}{2} - \varepsilon F(A, B, \tau) \sin\frac{\tau}{2} \right] d\tau ,$$

$$\frac{q^2}{2} B' = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left[A\left(\frac{q^2}{4} - 1\right) \cos^2\frac{\tau}{2} + B\left(\frac{q^2}{4} - 1\right) \sin\frac{\tau}{2} \cos\frac{\tau}{2} + \varepsilon F(A, B, \tau) \cos\frac{\tau}{2} \right] d\tau$$

auftretenden Integrale auszuwerten, was nach kurzer Rechnung auf

$$\left.\begin{aligned} q^2 A' &= B\left(1 - \frac{q^2}{4} + \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\frac{3}{4}\gamma\,[A^2 + B^2]\right) - \varepsilon\beta\frac{q}{2}A , \\ q^2 B' &= -\varepsilon\beta\frac{q}{2}B - A\left(1 - \frac{q^2}{4} - \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\frac{3}{4}\gamma\,[A^2 + B^2]\right) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

führt. Dieses nunmehr zeitfreie System kann als eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung für $A(B)$ in der Form

$$\frac{dA}{dB} = \frac{B\left(1 - \frac{q^2}{4} + \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon\gamma\,[A^2 + B^2]\right) - \varepsilon\beta\frac{q}{2}A}{-\varepsilon\beta\frac{q}{2}B - A\left(1 - \frac{q^2}{4} - \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon\gamma\,[A^2 + B^2]\right)} \tag{19}$$

behandelt werden. An (19) knüpfen alle weiteren Rechnungen an. Die Untersuchung der Übergangsschwingungen mit Hilfe des einfacheren Ersatzsystemes (18) oder (19) ist unter gewissen Bedingungen näherungsweise zulässig, wie *J. Haag*[1] nachgewiesen hat. Die Lösungen des ursprünglichen zeitabhängigen Systems unterscheiden sich dann von denen des zugeordneten zeitfreien Systems bei gleichen Anfangsbedingungen nur um einen Betrag von der Größenordnung ε. Der Ersatz der Gleichungen (17) durch (18) und (19) mag daher für die vorliegende Aufgabenstellung als ausreichende Näherung gelten.

Auch stationäre periodische Schwingungen lassen sich einfach aus (19) berechnen. Denn für stationäre Schwingungen muß zufolge des Ansatzes (13) A = konst., B = konst. eine Lösung der Gleichungen (18) sein, was offenbar nur möglich ist, wenn in (19) rechtseitig Zähler und Nenner zugleich verschwinden. Da dann eine singuläre Stelle der Differentialgleichung (19) vorliegt, kann man hier die *H. Poincaré*sche Theorie der Singularitäten heranziehen, um über die Stabilität der Schwingungen zu entscheiden.

4. Stationäre Schwingungen und deren Stabilität. Obgleich das eigentliche Ziel der Untersuchung die Berechnung der Einschwingvorgänge ist, müssen zunächst die stationären Endzustände der Stabbewegung berechnet werden. Dies ist notwendig, weil zwar für den ungedämpft schwingenden Stab diese stationären Bewegungen bekannt sind, aber die entsprechenden Angaben für gedämpfte Stabschwingungen noch fehlen.

a) Ungedämpfte Schwingungen. Der Vollständigkeit halber werden zunächst bekannte Ergebnisse[2] für den ungedämpft schwingenden Stab mit Hilfe der in Abschn. 3 eingeführten Methode nochmals kurz hergeleitet und vorangestellt. Zur Berechnung der ungedämpften Schwingungen hat man in (19) $\beta = 0$ zu setzen und diejenigen speziellen festen Werte von A und B zu bestimmen, für die (19) singulär wird. Dies führt auf die Koeffizientengleichungen

$$B_0\left(1 - \frac{q^2}{4} + \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\frac{3}{4}\gamma\,[A_0^2 + B_0^2]\right) = 0 ,$$

$$A_0\left(1 - \frac{q^2}{4} - \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\frac{3}{4}\gamma\,[A_0^2 + B_0^2]\right) = 0$$

[1] *J. Haag*, Bull. Sci. Math. 72 (1948), S. 69.

[2] Vgl. S. 325 der in Fußnote 1 auf Seite 53 genannten Arbeit. Die dortigen Gleichungen (57), (59) stimmen mit (20,2), (20,3) überein, wenn man nur lineare Potenzen von ε beibehält.

mit den Lösungsmöglichkeiten

$$1)\qquad A_0 = 0\,,\qquad B_0 = 0\,,\qquad W \equiv 0\,, \tag{20,1}$$

$$2)\qquad B_0 = 0\,,\qquad 1 - \frac{q^2}{4} + \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon\gamma A_0^2 = 0\,,\qquad W = \pm A_0 \cos\frac{\tau}{2}\,, \tag{20,2}$$

$$3)\qquad A_0 = 0\,,\qquad 1 - \frac{q^2}{4} - \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon\gamma B_0^2 = 0\,,\qquad W = \pm B_0 \sin\frac{\tau}{2}\,. \tag{20,3}$$

Wie bekannt gibt es also außer der gestreckten Stablage ohne Querschwingungen (Fall 1), je einen cos- und einen sin-Typ stationärer Schwingungen mit den angegebenen Frequenz-Amplituden-Abhängigkeiten (Fall 2 und 3). Da jedoch der sin-Typ nicht stabil ist[1], kommt dieser Lösung keine physikalische Bedeutung zu. Hingegen können der cos-Schwingungstyp und die Ruhelage unter gewissen Bedingungen sogar gleichzeitig stabil und damit beide möglich sein. Die Auffindung dieser Stabilitätsbedingungen würde mindestens eine Betrachtung der Lösungen von (19) in der Nachbarschaft der ausgezeichneten Werte A_0, B_0 erfordern. Hier kann man jedoch die Lösungen in der ganzen (A,B)-Ebene ohne Einschränkungen geschlossen angeben und gewinnt durch eine derartige Betrachtung der Übergangsschwingungen auch ein besseres Verständnis der Stabilitätseigenschaften der stationären Schwingungen. Die Stabilitätseigenschaften der Lösungsmöglichkeiten (20,1—3) werden daher bei der Berechnung der Übergangsschwingungen (Abschn. 5a) von selbst erkennbar und brauchen daher hier nicht abgeleitet werden.

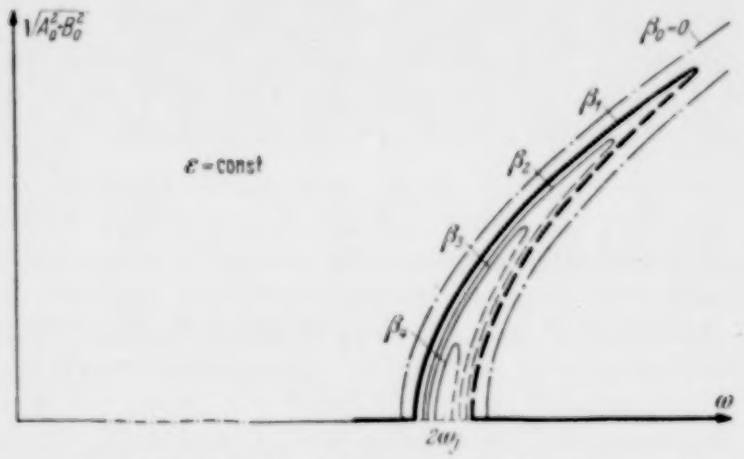

Abb. 4. Resonanzkurven für den gedämpft schwingenden Stab. Stabile Äste: ———, instabile Äste: — — —. Dämpfungskonstanten: $\beta_4 > \cdots > \beta_1$. Resonanzkurve für ungedämpfte Schwingungen ($\beta_0 = 0$) zum Vergleich: —·—·—.

b) Gedämpfte Schwingungen. Die in Abb. 3 für den ungedämpft schwingenden Stab wiedergegebene Resonanzkurve der Querschwingungen kann insofern den physikalischen Sachverhalt nicht voll befriedigend wiedergeben, als daraus keine endliche Größtamplitude für $\omega > 2\,\omega_j$ zu entnehmen ist. Da beim *Duffing*schen Problem der erzwungenen nichtlinearen Schwingungen für $\omega > 2\,\omega_j$ eine derartige Begrenzung der Amplitude besteht, wird man auch im vorliegenden Falle eine ganz im Endlichen verlaufende Resonanzkurve vermuten. Wie sich zeigen wird, genügt auch hier die Erfassung der dämpfenden Kräfte durch einen einfachen geschwindigkeitsproportionalen Ansatz. Die Berechnung der stationären Biegeschwingungen bei Anwesenheit dämpfender Kräfte knüpft zweckmäßig an die zeitfreie Differentialgleichung (19) und nicht unmittelbar an die Schwingungsgleichung (12) an, denn das Auftreten einer ersten Ableitung nach der Zeit infolge der Dämpfungskraft macht die Berechnung periodischer Schwingungen mit der üblicherweise verwendeten Störungsrechnung unmöglich. Da jedoch stationäre Lösungen aus dem zeitfreien System näherungsweise berechnet werden können, ist dieser Weg besonders auch im Hinblick auf den anschließend notwendigen Stabilitätsnachweis zweckmäßig. Entsprechend dem Vorgehen in Abschn. 4a hat man auch hier die Singularitäten von (19) aufzusuchen, wenn man periodische Lösungen berechnen will. An Stelle von (20) ergibt sich zwar für die Ruhelage ohne Querschwingungen noch $A_0 = B_0 = 0$ aber für Querschwingungen selbst das gekoppelte nichtlineare Gleichungssystem für A_0 und B_0:

$$B_0\left(1 - \frac{q^2}{4} + \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\gamma\,\varepsilon\,[A_0^2 + B_0^2]\right) - \varepsilon\,\beta\,\frac{q}{2}\,A_0 = 0\,, \tag{21}$$

$$-\varepsilon\,\beta\,\frac{q}{2}\,B_0 - A_0\left(1 - \frac{q^2}{4} - \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\,\varepsilon\,\gamma\,[A_0^2 + B_0^2]\right) = 0\,. \tag{22}$$

Für $A_0 \neq 0$, $B_0 \neq 0$ lassen sich die Gleichungen (21) und (22) leicht in bezug auf das „Amplitudenquadrat“ $[A_0^2 + B_0^2]$ hin auswerten. So ergibt sich als Frequenz–Amplitudengleichung mit

[1] Vgl. die in Fußnote 1 auf Seite 53 genannte Arbeit.

dem Frequenzparameter $q = \varkappa/\varkappa_j$ die bereits von *N. W. McLachlan*[1] angegebene Näherung

$$\frac{3}{4}\varepsilon\gamma\,[A_0^2 + B_0^2]^2 = \frac{q^2}{4} - 1 \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2\alpha^2}{4} - \varepsilon^2\beta^2\frac{q^2}{4}}\,, \tag{23}$$

worin das Doppelvorzeichen den beiden zusammenlaufenden Ästen der nunmehr geschlossenen and ganz im Endlichen verlaufenden Resonanzkurve entspricht. Der untere Ast der Resonanzkurve gehört der negativen Wurzel von (23) zu. Er wird sich sogleich als zu einer nicht stabilen Schwingung gehörend erweisen und ist daher auch in der Auftragung eines Zahlenbeispieles der Abb. 4 nur gestrichelt eingezeichnet. Alle Kurven liegen ganz innerhalb der zum Vergleich strichpunktiert eingetragenen Resonanzkurve für den ungedämpft schwingenden Stab. Übrigens verlangt die Realität der in (23) vorkommenden Wurzel, daß die dort durch $\varepsilon\alpha$ eingehende Erregung einen gewissen als Schwellwert bekannten Wert überschreitet.

Die Beantwortung der Stabilitätsfrage wird ebenfalls an (19) angeschlossen, indem die auf Stabilität zu prüfenden Schwingungen durch die Funktionen $A(\tau)$ und $B(\tau)$ in der Nähe der ausgezeichneten Werte A_0 und B_0 untersucht werden. Zu dem Zweck wird in (19)

$$A(\tau) = A_0 + \eta_j(\tau)\,, \qquad B(\tau) = B_0 + \zeta(\tau)$$

für kleine Werte von η_j und ζ gesetzt und damit die Natur der Singularitäten der Punkte A_0, B_0 untersucht. Eine solche Beschränkung auf differentiell kleine Nachbarwerte ist hier im Gegensatz zum ungedämpft schwingenden Stab notwendig, da die Differentialgleichung (19) für $\beta \neq 0$ nicht mehr geschlossen lösbar ist und daher A und B auch nicht allgemein formelmäßig in der ganzen (A, B)-Ebene diskutiert werden können. Zur Untersuchung der Stabilität der durch η_j und ζ gegebenen Schwingungen kann man jedoch in bezug auf η_j und ζ linearisieren und erhält dann die leicht auswertbare Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{a\,\zeta + b\,\eta}{c\,\zeta + d\,\eta} \tag{24}$$

mit den Koeffizienten:

$$a = 1 - \frac{q^2}{4} + \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon\gamma\,[A_0^2 + 3\,B_0^2]\,, \qquad b = \frac{3}{2}\varepsilon\gamma\,A_0\,B_0 - \varepsilon\beta\frac{q}{2}\,,$$

$$c = -\frac{3}{2}\varepsilon\gamma\,A_0\,B_0 - \varepsilon\beta\frac{q}{2}\,, \qquad d = -\left(1 - \frac{q^2}{4} - \varepsilon\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon\gamma\,[3\,A_0^2 + B_0^2]\right).$$

Je nach dem Verhalten der Lösungen von (24) kann man hier die Singularitäten A_0, B_0 als Strudelpunkte, Sattelpunkte oder Knotenpunkte klassifizieren und damit die Stabilitätsfrage beantworten. Da alle in der Nähe eines Strudelpunktes verlaufenden Lösungskurven asymptotisch in diesen singulären Punkt einmünden, gehören diese Koordinaten A_0, B_0 einer stabilen Schwingung zu. Im Gegensatz hierzu führt ein Sattelpunkt auf eine instabile Schwingung.

Zur Untersuchung der Singularitäten hat man zunächst die Diskriminante

$$D = (b - c)^2 + 4\,a\,d \tag{25}$$

zu bilden [2]. Falls dieser Wert D positiv ausfällt, hat man noch

$$\Delta = a\,d - b\,c \tag{26}$$

zur Entscheidung heranzuziehen. Wegen $b + c < 0$ sind außer den Strudelpunkten auch alle etwa vorhandenen Knotenpunkte stabil. Bildet man zunächst D, so erhält man nach elementaren, jedoch längeren, hier unterdrückten Zwischenrechnungen aus (25):

$$D = 4\,\varepsilon^2\beta^2\frac{q^2}{4} - 3\,\varepsilon\gamma\,[A_0^2 + B_0^2]\left(1 - \frac{q^2}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon\gamma\,[A_0^2 + B_0^2]\right), \tag{27}$$

wobei noch kein Gebrauch von der Frequenz–Amplituden-Beziehung (23) gemacht wurde. Daher gilt (27) noch für beide Äste der Resonanzkurve.

Die weitere Auswertung soll nun zunächst für den unteren Ast der Resonanzkurve geschehen. Demgemäß nimmt D mit der jetzt geltenden Beziehung

$$1 - \frac{q^2}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon\gamma\,[A_0^2 + B_0^2] = -\sqrt{\frac{\varepsilon^2\alpha^2}{4} - \varepsilon^2\beta^2\frac{q^2}{4}} \tag{28}$$

[1] *N. W. McLachlan*, Ordinary non-linear Differential Equations in engineering and physical Sciences, S. 126, Oxford 1950.

[2] Vgl. z. B. *J. J. Stoker*, Nonlinear Vibrations, S. 44, New York 1950.

einen stets positiven Wert an:

$$D_s = 4\,\varepsilon^2\,\beta^2\,\frac{q^2}{4} + 3\,\varepsilon\,\gamma\,[A_0^2 + B_0^2]\sqrt{\frac{\varepsilon^2\,\alpha^2}{4} - \varepsilon^2\,\beta^2\,\frac{q^2}{4}} > 0\,. \tag{29}$$

Es kann also nur ein Sattelpunkt oder ein Knotenpunkt vorliegen. Um zwischen diesen beiden Möglichkeiten zu entscheiden, muß (26) herangezogen werden. Nach kurzer Rechnung ergibt sich unter Verwendung von (28):

$$\Delta = +\,3\,\varepsilon\,\gamma\,[A_0^2 + B_0^2]\sqrt{\frac{\varepsilon^2\,\alpha^2}{4} - \varepsilon^2\,\beta^2\,\frac{q^2}{4}} > 0\,, \tag{30}$$

so daß ein Sattelpunkt vorliegt. Demnach ist der untere Ast der Resonanzkurve stets instabil und hat damit keine physikalische Bedeutung. Er ist in der Resonanzkurve daher nur der mathematischen Vollständigkeit halber und gestrichelt eingetragen.

Um die Stabilität der dem oberen Ast der Resonanzkurve zugehörenden Schwingungen nachzuweisen, hat man nun die aus (23) folgende Beziehung mit dem positiven Wurzelzeichen in (25) einzutragen und erhält dann an Stelle von (29):

$$D_e = 4\,\varepsilon^2\,\beta^2\,\frac{q^2}{4} - 3\,\varepsilon\,\gamma\,[A_0^2 + B_0^2]\sqrt{\frac{\varepsilon^2\,\alpha^2}{4} - \varepsilon^2\,\beta^2\,\frac{q^2}{4}}\,.$$

Jedenfalls ist $D_e < 0$, wenn überhaupt keine Dämpfung vorhanden ist ($\beta = 0$) und für die in der Technik nur in Betracht kommenden kleinen Dämpfungen dürfte dies auch gelten. Dann liegt also ein Strudelpunkt vor. Wird die Dämpfungskonstante größer gewählt, so kann D_e Null oder sogar positiv werden. Man hat dann in beiden Fällen einen stabilen Knoten, da an Stelle von (30) jetzt $\Delta < 0$ wird. Damit ist die Stabilität der dem oberen Ast der Resonanzkurve entsprechenden Schwingung allgemein nachgewiesen.

Anschaulich ist dieses Stabilitätsverhalten durchaus verständlich, wenn man auf den ungedämpft schwingenden Stab zurückblickt. Denn der obere Teil der Resonanzkurve gehört zu einem Schwingungstyp, der noch im wesentlichen ein cos-Typ ist, wenn er auch auf Grund der Dämpfung eine Phasenverschiebung aufweist. Doch ist in diesem Falle immer noch der Betrag von A_0 wesentlich größer als der von B_0. Entsprechendes gilt für den unteren Teil der Resonanzkurve, die wegen des größeren Betrages von B_0 einem Schwingungstyp zugehört, der im wesentlichen ein sin-Typ ist.

5. Einschwingvorgänge. Nach vorangegangener Untersuchung der stationären Schwingungen sollen nun die Einschwingvorgänge in diese stationären Endzustände hinein untersucht werden. Dabei wird insbesondere die Abhängigkeit des Endzustandes von der Art der Anfangsstörung aufzudecken sein.

Seiner größeren Übersichtlichkeit wegen wird wieder der ungedämpft schwingende Stab zuerst behandelt, obgleich erst die Einbeziehung dämpfender Kräfte ein eindeutiges Bild der Erscheinungen liefert.

a) Ungedämpfte Schwingungen. Zur näherungsweisen Berechnung der Übergangsschwingungen wird an das Differentialgleichungssystem (18) angeknüpft und dieses in der Form der zeitfreien Einzelgleichung (19) ausgewertet. Dies ist für den ungedämpft schwingenden Stab leicht möglich, da sich (19) für $\beta = 0$ streng lösen läßt. Nach kurzer Rechnung ergibt sich mit der Integrationskonstanten C die Lösung in impliziter Form zu:

$$\frac{3}{4}\varepsilon\gamma\,(A^2 + B^2)^2 + 2\left(1 - \frac{q^2}{4} - \varepsilon\frac{\alpha}{2}\right)(A^2 + B^2) + 2\,\varepsilon\,\alpha\,B^2 = C\,. \tag{31}$$

Die zahlenmäßige Auswertung dieser Lösung für ein Beispiel mit vier verschiedenen Werten der Längserregungsfrequenz ergibt die in den Abb. 5, 6, 7 und 8 gezeichneten (A, B)-Kurven [1]. Hierin gehören die verschiedenen (A, B)-Kurven einer Abbildung verschiedenen Werten der in (31) vorkommenden Integrationskonstanten C zu. Die Zeit ist allerdings in den (A, B)-Kurven nur als unbekannter Parameter enthalten, so daß sich nur der Durchlaufungssinn für die Kurven angeben läßt. Dieser ist auf den (A, B)-Kurven durch Pfeile in Richtung wachsenden Zeitparameters kenntlich gemacht.

Durch den Ansatz (13) läßt sich allgemein eine beliebige, kleine Anfangsstörung beschreiben. Denn $A(\tau)$ und $B(\tau)$ sind Lösungen des Differentialgleichungssystems (18) und bringen daher je

[1] Bei den numerischen Auswertungen hat mich Herr *H. Böse* wirksam unterstützt, was durch eine Zuwendung der Karlsruher Hochschulvereinigung e. V. in dankenswerter Weise ermöglicht wurde.

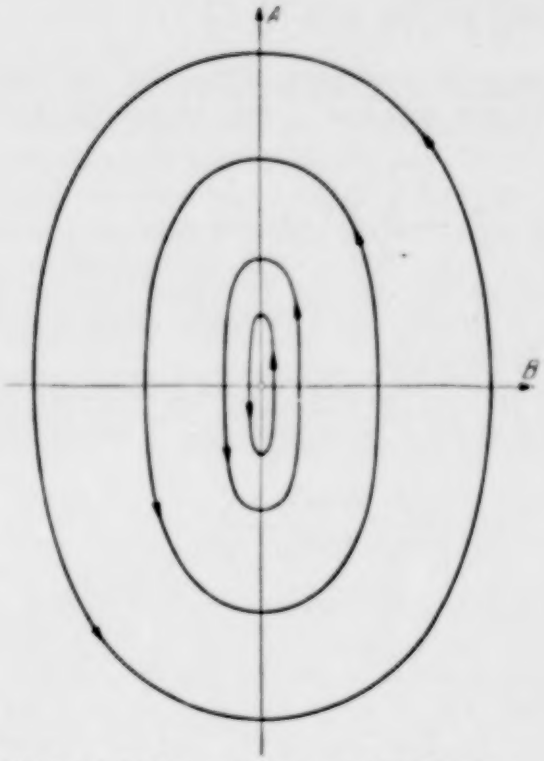

Abb. 5. (A, B)-Kurven für $\omega = \omega_e$; ohne Dämpfung.

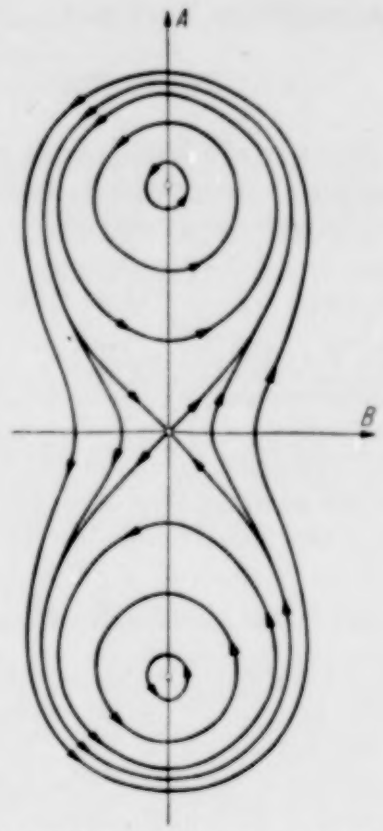

Abb. 6. (A, B)-Kurven für $\omega = 2\,\omega_f$; ohne Dämpfung.

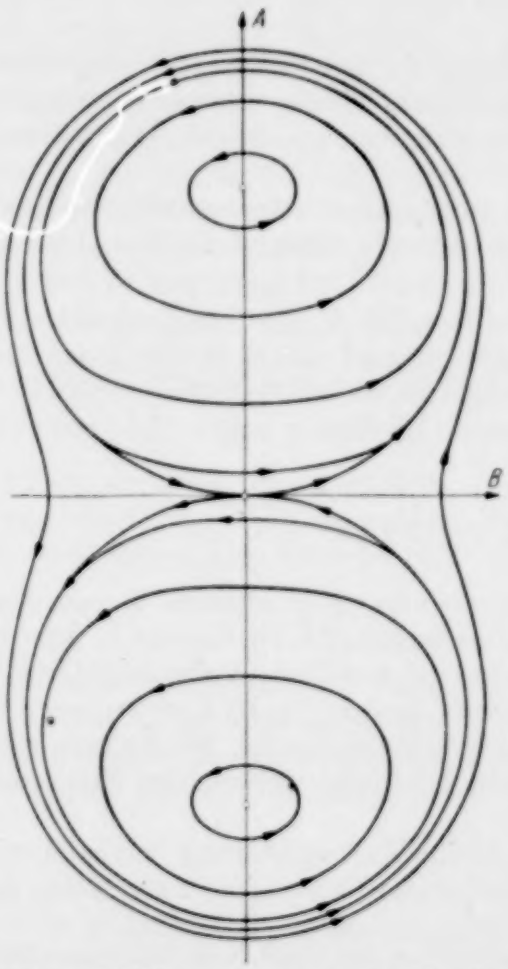

Abb. 7. (A, B)-Kurven für $\omega = \omega_s$; ohne Dämpfung.

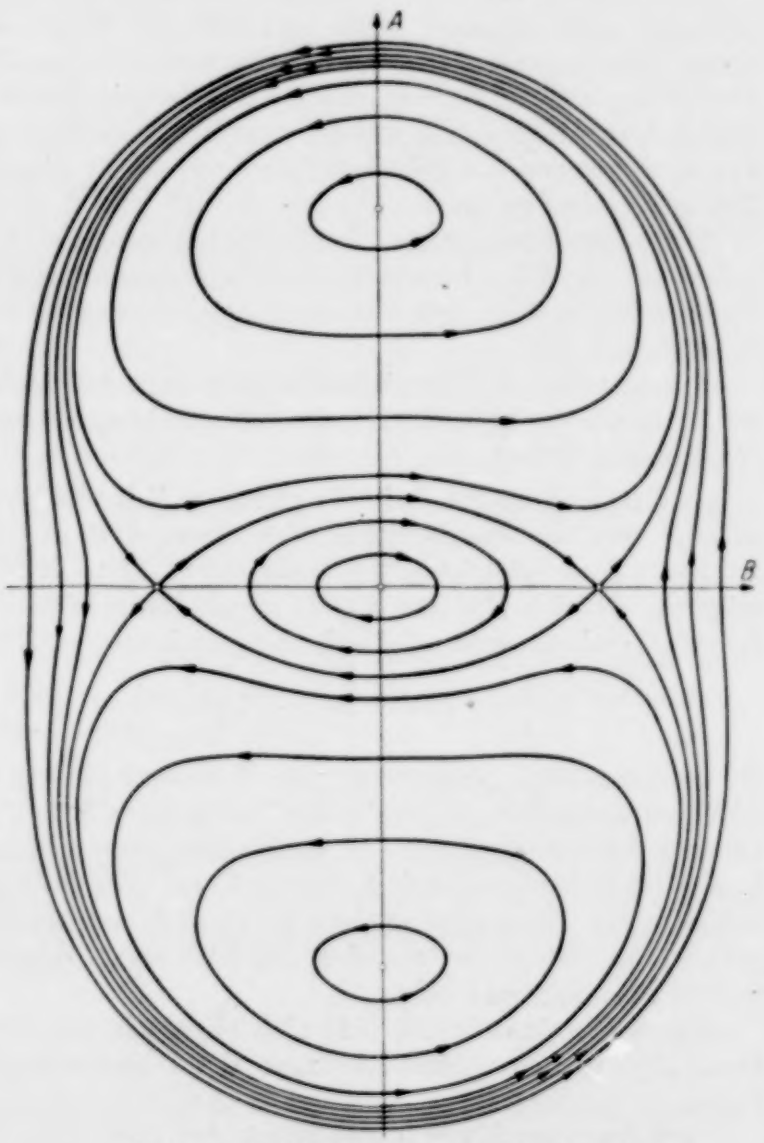

Abb. 8. (A, B)-Kurven für $\omega > 2\,\omega_f$; ohne Dämpfung.

eine Integrationskonstante in $W(\tau)$ ein. Somit können vorgegebene Werte der Anfangsauslenkung und der Anfangsgeschwindigkeit erfaßt werden und damit hat der Ansatz (13) zu einer hinreichend allgemeinen Lösung geführt, die in der Form der (A, B)-Kurven ausgewertet werden kann.

Abb. 5 gehört zu einer Anregungsfrequenz (ω_c, Abb. 9 oben), welche gerade auf der einen Grenze des Instabilitätsbereiches liegt, und als stationäre Bewegung nur die gestreckte Lage zuläßt (Schwingungsamplitude Null, Abb. 9 unten). Diese Stabilitätsaussage liest man unmittelbar aus dem geometrischen Bilde ab, denn die gestreckte Stablage ohne Querschwingungen wird durch den einzig vorhandenen singulären Punkt $A_0 = B_0 = 0$ wiedergegeben und dieser Punkt ist ein isolierter Punkt. Offenbar verlaufen demnach bei kleiner Anfangsstörung alle Schwingungen als kleine Bewegungen um die Ruhelage, so daß diese selbst stabil ist.

In Abb. 6 ist eine Frequenz genau in Mitten des Instabilitätsbereiches ($\omega = 2\,\omega_j$, Abb. 9) angenommen, wozu eine instabile gestreckte Lage und eine stabile Querschwingung endlicher Amplitude gehören (Abb. 9). Ersichtlich gibt sich die Instabilität dadurch zu erkennen, daß der Punkt $A_0 = B_0 = 0$ gegenüber Abb. 5 seinen Charakter geändert hat, indem er nun ein Doppelpunkt geworden ist und daher alle in seiner Nähe verlaufenden Kurven eine sich entfernende Tendenz aufweisen. Hingegen sind

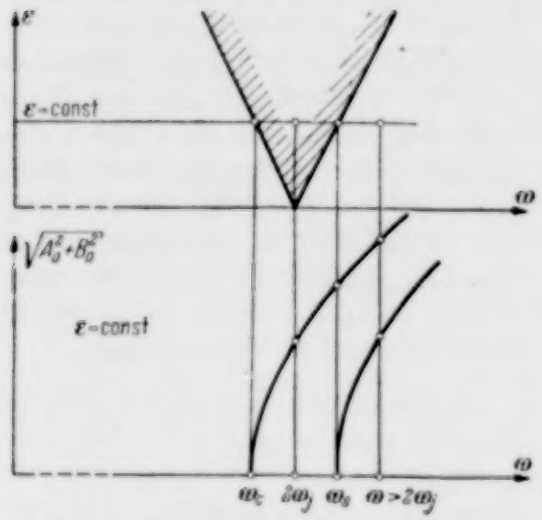

Abb. 9. (oben) Instabilitätsbreiche. (unten) Resonanzkurve, untersuchte Frequenzen durch ○ bezeichnet.

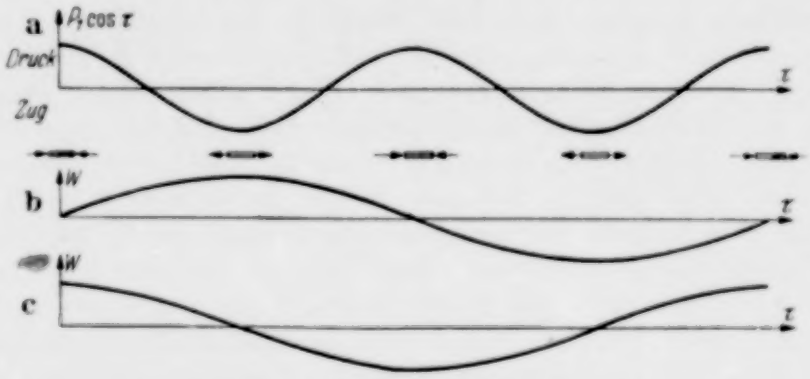

Abb. 10. a Zeitlicher Verlauf der pulsierenden Axiallast. b Instabile Querschwingung: sin τ/2-Typ. c Stabile Querschwingung: cos τ/2-Typ.

zwei weitere singuläre Stellen als Einsiedlerpunkte in das Bild gekommen. Sie gehören wegen $A_0 \neq 0$, $B_0 = 0$ zu den halbperiodischen Querschwingungen vom cos-Typ, deren Stabilität aus der isolierten Lage dieser Punkte zu erkennen ist. Allerdings gibt Abb. 6 den ersten Hinweis darauf, daß die Einbeziehung dämpfender Kräfte wünschenswert ist. Denn Schwingungsbewegungen mit derart schwingenden Amplituden und Phasen, wie sie die Abb. 6 für größere Beträge von A und B nicht ausschließt, sind wenig plausibel und tatsächlich auch nur wegen der bedenklichen Vernachlässigung dämpfender Kräfte aufgetreten.

In der Abb. 7 ist der Abb. 5 entsprechende Grenzfall aufgetragen. Die Frequenz liegt auf der gegenüberliegenden Stabilitätsgrenze (ω_s, Abb. 9) und aus dem Amplitudendiagramm liest man ab, daß hier die gestreckte Lage ohne Querschwingungen nicht stabil ist, jedoch stabile Querschwingungen mit endlicher Amplitude möglich sind. Die Stabilitätseigenschaften lassen sich wiederum aus der jeweiligen Natur der Singularitäten ablesen.

In Abb. 8 ist der hier besonders interessierende Fall ausgewertet, der bei einer Anregungsfrequenz $\omega > 2\,\omega_j$ auf zwei stabile Bewegungsformen gleichzeitig führt. Die Stabilitätskarte (Abb. 9 oben) sagt für diese Frequenz nur aus, daß die Stabilität der gestreckten Lage ohne Querschwingungen besteht, während aus dem Amplitudendiagramm (Abb. 9 unten) stabile Schwingungen mit der Amplitude Null (Ruhelage), aber auch stabile Querschwingungen mit endlicher Amplitude zu entnehmen sind. Entsprechend vielgestaltig ist der Verlauf der Kurven in Abb. 8, über den man zunächst schon sagen kann, daß auf Grund eines Satzes von *H. Poincaré* [1] die drei Wirbelpunkte notwendig zwei Sattelpunkte mit in das geometrische Bild der (A, B)-Kurven bringen müssen. Während offenbar jede Stabschwingung, die durch eine Störung mit den entsprechenden Anfangswerten eingeleitet wird, ganz in der Nähe der Amplituden- und Phasenwerte von $A_0 = B_0 = 0$ nach (20,1) oder $B_0 = 0$, $A_0 \neq 0$ nach (20,2) verläuft, entfernt sich jede Schwingung in der (A, B)-Ebene aus der Nähe der durch (20,3) $A_0 = 0$, $B_0 \neq 0$ gegebenen instabilen Schwingung. Diese merkwürdige Instabilität der sin-Schwingung hatte sich bereits

[1] Vgl. z. B. S. 48 des in der Fußnote auf S. 60 zitierten Buches von *J. J. Stoker*.

früher [1] mit der Methode der kleinen Schwingungen nachweisen lassen und ergibt sich hier formal daraus, daß der durch (20,3) gegebene Punkt ein Doppelpunkt der (A, B)-Kurven ist und sich daher alle Nachbarkurven von ihm entfernen. Die Instabilitätseigenschaften der sin-Schwingung läßt sich insofern anschaulich verstehen (Abb. 10) als bei der in (3) gewählten Vorzeichenfestsetzung für das Potential $V(\tau)$ der Längskraft

$$\varepsilon \Lambda \cos \tau > 0$$

einen Längsdruck im Stab bezeichnet und daher eine Querschwingung vom $\sin \tau/2$-Typ immer gerade in die gestreckte Lage zurückgezogen wird, wenn eine Querauslenkung vorhanden ist. Wie aus Abb. 10 für den ebenfalls eingezeichneten $\cos \tau/2$-Schwingungstyp zu ersehen ist, tritt dann eine andersartige Phasenbeziehung ein, so daß der Stab im ausgelenkten Zustand gedrückt wird und daher eine Querschwingung endlicher Amplitude aufrechterhalten werden kann.

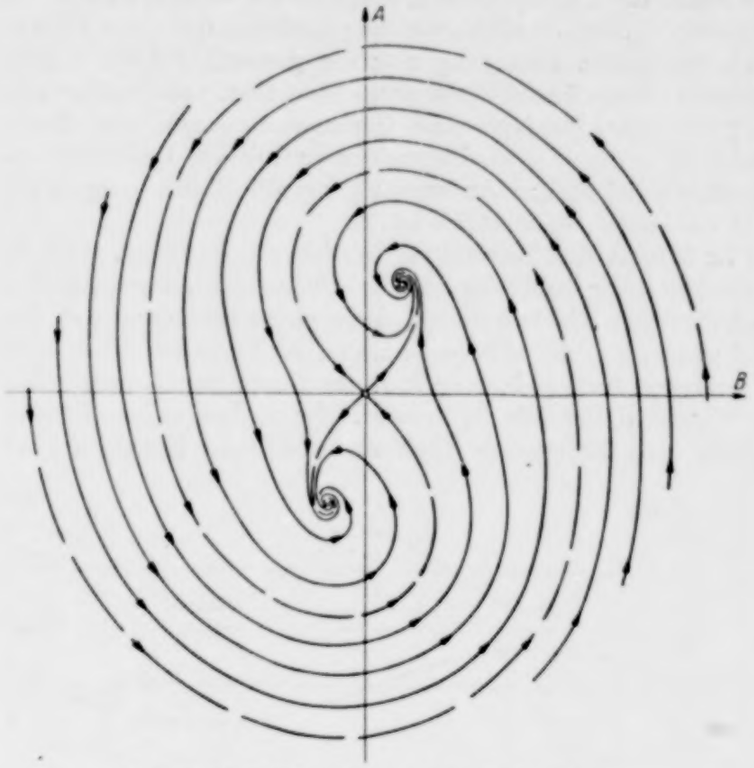

Abb. 11. (A, B)-Kurven für $\omega = 2\,\omega_j$; mit Dämpfung.

Auch in Abb. 8 sind für größere Beträge von A und B in Kreise übergehende Kurven zu sehen. Diese entsprechen ungedämpften, fastperiodischen Schwingungen, die jedoch wenig plausibel sind und die auch bei Berücksichtigung dämpfender Kräfte verschwinden. Allerdings wird (19) für den gedämpft schwingenden Stab nicht mehr geschlossen zu lösen sein und dadurch die Übersichtlichkeit verringert, weshalb die durchsichtige und in sich geschlossene Theorie des ungedämpft schwingenden Stabes vorangestellt wurde.

Abb. 12. (A, B)-Kurven für $\omega > 2\,\omega_j$; mit Dämpfung.

b) Gedämpfte Schwingungen. Die Betrachtung des ungedämpft schwingenden Stabes ergab insofern kein völlig befriedigendes Bild von den Einschwingvorgängen, als sich immer noch Bewegungen ergeben, die nicht in eine stationäre Schwingung oder in die Ruhelage einmünden. Die Einbeziehung dämpfender Kräfte erweist sich daher als notwendig und bereits der einfache geschwindigkeitsproportionale Ansatz für die Dämpfungskraft ergibt eindeutige Verhältnisse in dem Sinne, daß dann zu jeder Anfangsstörung ein stationärer Endzustand anzugeben ist, inden der Stab einschwingt.

[1] Vgl. S. 326, Abschn. β) der in Fußnote 1 auf S. 53 genannten Arbeit.

Die Auswertung der Differentialgleichung (19) hat nun für $\beta \neq 0$ zu geschehen und ist offenbar formelmäßig nicht mehr möglich. Die Integralkurven können jedoch für den vorliegenden Fall genügend genau mit Hilfe des Isoklinenfeldes gezeichnet werden. Das Ergebnis dieser numerischen Auswertungen für ein Zahlenbeispiel mit den bereits beim ungedämpft schwingenden Stab verwendeten Zahlenwerten $\varepsilon, \gamma, \alpha$ und nun jedoch kleinem $\beta \neq 0$ ist in den Abb. 11 und 12 aufgetragen. Dabei entspricht Abb. 11 der in Abb. 6 untersuchten Frequenz $\omega = 2\,\omega_j$ in Mitten des Instabilitätsbereiches, während Abb. 12 dem in Abb. 8 aufgetragenen Falle für $\omega > 2\,\omega_j$ entspricht. Hingegen ist auf die Untersuchung der Frequenzen auf den Bereichsgrenzen (ω_c und ω_s aus Abb. 9) hier verzichtet worden.

Für $\omega = 2\,\omega_j$ entnimmt man der Abb. 11 die Instabilität der gestreckten Lage und die Stabilität der Querschwingungen endlicher Amplitude. Die Instabilitätseigenschaften der gestreckten Lage $A_0 = 0$, $B_0 = 0$ ergibt sich im geometrischen Bilde wiederum als Sattelpunkt zu erkennen, während die stationäre Querschwingung sich durch zwei Strudelpunkte mit $A_0 \neq 0$, $B_0 \neq 0$ mit kleinem Betrag von B_0 anzeigt. Die Berechnung dieser Werte als singuläre Stellen von (19) wurde in Abschn. 4b bereits erledigt und es genügt hier darauf hinzuweisen, daß man auf Grund der dämpfungsbedingten Phasenverschiebung keine reine cos-Schwingung erwarten darf, sondern durch $B_0 \neq 0$ auch einen sin-Anteil im Ansatz (13) erhält.

Für $\omega > 2\,\omega_j$ ist in Abb. 12 der wichtige Fall aufgetragen, in dem außer der Ruhelage zwei Querschwingungen stabil sind. Im geometrischen Bilde entspricht dies wiederum drei singulären Punkten, die als Strudelpunkte stabil sind. Die beiden weiteren Schwingungen, die dem sin-Typ im Falle des ungedämpft schwingenden Stabes entsprechen, sind auch hier als instabile Sattelpunkte zu erkennen. In den Abb. 11 und 12 ist nunmehr jeder beliebigen Anfangsstörung eindeutig ein stationärer Endzustand zuzuordnen, auf den sich der Stab im Laufe der Zeit einschwingt. Und zwar trennen diejenigen speziellen (A, B)-Kurven, welche durch die Sattelpunkte laufen, Gebiete der (A, B)-Ebene voneinander ab, deren Kurven sämtlich auf den gleichen singulären Punkt zulaufen. Jeder der genannten speziellen Kurven wird als Separatrix bezeichnet und diese sind in den Abb. 11 und 12 gestrichelt eingezeichnet. Offenbar geben diese trennenden (A, B)-Kurven in Abb. 12 die Entscheidung darüber, ob eine spezielle Anfangsstörung wieder in die Ruhelage abklingt oder sich auf eine der beiden möglichen Querschwingungen gleicher endlicher Amplituden aufschaukelt. Demnach hängt es also von der Anfangsamplitude und Anfangsphase einer Störung ab, ob sich eine Querschwingung einstellt oder nicht. Die in Abschn. 1 aufgeworfene Frage a) kann damit für jeden Einzelfall auch quantitativ beantwortet werden. Die (A, B)-Kurven enthalten die Zeitvariable nur als Parameter. Um den Zeitablauf kenntlich zu machen, sind auch in Abb. 11 und 12 Pfeile eingetragen, doch kann über den Zeitmaßstab auf den Kurven selbst kaum etwas ausgesagt werden. Während die Strudelzentren mit unbegrenzt wachsender Zeit angenähert werden, entsprechen die Sattelpunkte für jeweils zwei ihn durchlaufende Kurvenäste dem Wert $\tau \to +\infty$, während die restlichen beiden nur für $\tau \to -\infty$ auf den Sattelpunkt führen[1]. Daraus folgt, daß der Zeitmaßstab der in ihrer unmittelbaren Nähe verlaufenden Kurven sehr gedrängt ist und demgemäß die Kurvenäste nur in längeren Zeiträumen durchlaufen werden. Da aber aus dem zeitfreien System überhaupt nur Aussagen zu gewinnen sind, deren Fehler mit wachsender Zeit zunimmt [2], sind hier keine scharfen Aussagen zu erwarten, was aber im vorliegenden Falle unwesentlich ist, da die zugehörige Schwingung ohnehin instabil ist.

6. Berechtigung der Näherungsrechnung. An Stelle des vollständigen Systems der Schwingungsgleichungen (10) wurde bisher nur jeweils die eine verbleibende Einzelgleichung (12) mit der Eigenfrequenz ω_j ausgewertet, wenn Schwingungen mit Erregerfrequenzen $\omega \approx 2\,\omega_j$ untersucht werden sollten. Es muß daher noch gezeigt werden, daß dieses Vorgehen in dem Sinne berechtigt ist, daß die bei der Einzelgleichung gefundenen Phänomene auch in den Schwingungen des gesamten Systems wiederzufinden sind. Für diesen Nachweis soll die von *J. Haag* [3] auch auf Schwingungssysteme mit mehreren Freiheitsgraden ausgedehnte Methode der langsam veränderlichen Phase und Amplitude verwendet werden. Zu dem Zweck wird das vollständige System (10) in der Form

$$W_j'' + \frac{1}{q_j^2}\,W_j = \frac{\varepsilon}{q_j^2}\left(-\beta_j q_j\,W_j' + \alpha_j \cos\tau\,W_j - \gamma_{jj}\,W_j^3 - W_j \sum_{\substack{k=1 \\ \neq j}}^{N} \gamma_{jk}\,W_k^2\right) = \frac{\varepsilon}{q_j^2}\,F_j(W, W', \tau) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N) \quad (10{,}1)$$

[1] *J. Haag*, Les Mouvements vibratoires, Bd. 1, S. 135, Paris 1952.
[2] Vgl. die in Fußnote 1 auf S. 58 genannte Arbeit von *J. Haag*.
[3] *J. Haag*, Ann. scient. de l'École Norm. Sup. 3, 64 (1947), S. 285.

unter Beibehaltung der Abkürzungen (11, 1—6) geschrieben. Mit den natürlichen Zahlen m_j, M und dem kleinen Parameter ε wird zunächst eine Näherung für $1/q_j$ durch

$$\frac{1}{q_j} = \frac{\varkappa_j}{\varkappa} = \frac{m_j}{M}\sqrt{1 + \varepsilon \lambda_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{32}$$

eingeführt, worin die $\lambda_j \gtreqless 0$ reelle Konstanten bezeichnen. Dann kann man an Stelle von (10,1) schreiben

$$W_j'' + \left(\frac{m_j}{M}\right)^2 W_j = \varepsilon \left(\frac{m_j}{M}\right)^2 [-\lambda_j W_j + F_j(W, W', \tau)] , \tag{33}$$

wenn rechtseitig wie immer im folgenden nur erste Potenzen von ε beibehalten werden und W und W' für die Gesamtheit der in F_j vorkommenden Funktionen W_j steht. Die gesuchten Zeitfunktionen W_j werden nun mit den Amplituden $y_j(\tau)$ und den Phasen $x_j(\tau)$ formal etwas anders als in (13) in der Gestalt

$$W_j = y_j \cos\left(\frac{m_j}{M}\tau + x_j\right) = y_j \cos \Phi_j$$

angesetzt. Die Langsamveränderlichkeit von y_j und x_j soll durch die zusätzliche Forderung

$$W_j' = -\frac{m_j}{M} y_j \sin \Phi_j \tag{34}$$

zum Ausdruck kommen, so daß also

$$-y_j x_j' \sin \Phi_j + y_j' \cos \Phi_j = 0 , \qquad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{35}$$

sein muß. Bildet man durch Differentiation von (34) die Ableitungen W_j'' und setzt diese in (33) ein, so erhält man

$$-y_j x_j' \cos \Phi_j - y_j' \sin \Phi_j = \varepsilon \frac{m_j}{M}\left[-\lambda_j y_j \cos \Phi_j + F_j\left(y \cos \Phi, -\frac{m}{M} y \sin \Phi, \tau\right)\right], \quad (j = 1, 2, \ldots, N), \tag{36}$$

was sich zusammen mit (35) nach x_j und y_j auflösen läßt. Diese Auflösung ergibt das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$y_j x_j' = \varepsilon \frac{m_j}{M}\left[\lambda_j y_j \cos \Phi_j - F_j\left(y \cos \Phi, -\frac{m}{M} y \sin \Phi, \tau\right)\right] \cos \Phi_j , \tag{37,1}$$

$$y_j' = \varepsilon \frac{m_j}{M}\left[\lambda_j y_j \cos \Phi_j - F_j\left(y \cos \Phi, -\frac{m}{M} y \sin \Phi, \tau\right)\right] \sin \Phi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, N) , \tag{37,2}$$

worin (37,1) im allgemeinen den Ausschluß der Werte $y_j = 0$ verlangt. Weil im vorliegenden Falle jedoch die Funktionen F_j jeweils den Faktor y_j abspalten, gilt hier (37,1) ohne diese Einschränkung. Da in (37) die Zeit explizit auftritt, geht man zweckmäßig durch Mittelung über eine Periode der rechten Seiten zum zugeordneten zeitfreien System über, denn stationäre Schwingungen sind näherungsweise auch aus diesem vereinfachten zeitfreien System noch zu berechnen.

Das zeitfreie System

$$x_j' = \varepsilon \frac{X_j}{y_j} , \qquad y_j' = \varepsilon Y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{38}$$

ergibt sich nach Ausführung bestimmter Integrale mit den rechten Seiten

$$\left.\begin{aligned} X_j &= \frac{1}{2\pi M}\int_0^{2\pi M} \frac{m_j}{M}\left[\lambda_j y_j \cos \Phi_j - F_j\left(y \cos \Phi, -\frac{m}{M} y \sin \Phi, \tau\right)\right] \cos \Phi_j \, d\tau , \\ Y_j &= \frac{1}{2\pi M}\int_0^{2\pi M} \frac{m_j}{M}\left[\lambda_j y_j \cos \Phi_j - F_j\left(y \cos \Phi, -\frac{m}{M} y \sin \Phi, \tau\right)\right] \sin \Phi_j \, d\tau , \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

worin für die Mittelwertbildung unter dem Integralzeichen y_j und x_j wie Konstante zu behandeln sind.

Da in den untersuchten Fällen die Erregerfrequenz annähernd gleich dem doppelten Wert einer Eigenfrequenz ω_j der Biegeschwingungen ist, hat man nach (32) die ganzen Zahlen m_j und

M so zu wählen, daß für den festen Zeigerwert j gilt:

$$2\frac{m_j}{M} - 1 = 0 .$$

Dann ist auf Grund der als verschieden vorausgesetzten Eigenfrequenzen

$$2\frac{m_k}{M} - 1 \neq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N; \neq j)$$

von selbst erfüllt. Nach Auswertung der Integrale (39) liefert (38) dann:

$$\frac{1}{y_j} X_j = \frac{m_j}{M}\left(\frac{\lambda_j}{2} - \frac{\alpha_j}{4}\cos 2\,x_j + \frac{3}{8}\gamma_{jj}\,y_j^2 + \frac{1}{4}\sum_{\substack{k=1\\ \neq j}}^{N}\gamma_{jk}\,y_k^2\right), \tag{40,1}$$

$$\frac{1}{y_k} X_k = \frac{m_k}{M}\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{3}{8}\gamma_{kk}\,y_k^2 + \frac{1}{4}\sum_{\substack{m=1\\ \neq k}}^{N}\gamma_{km}\,y_m^2\right), \tag{40,2}$$

$$Y_j = \frac{m_j}{M}\left(-\frac{\alpha_j}{4}\,y_j \sin 2\,x_j - \frac{\beta_j}{2}\,y_j\right), \tag{40,3}$$

$$Y_k = \frac{m_k}{M}\left(-\frac{\beta_k}{2}\,y_k\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N, \neq j) . \tag{40,4}$$

Für eine stationäre Schwingung müssen alle Amplituden y_j und Phasen x_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ konstante Werte annehmen, was offenbar dann der Fall ist, wenn mit den verschwindenden linken Seiten von (38) auch alle rechten Seiten verschwinden, und dies sind die Gleichungen:

$$\frac{1}{y_j} X_j = 0 , \qquad \frac{1}{y_k} X_k = 0 , \qquad Y_j = 0 , \qquad Y_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N, \neq j) . \tag{40,1–4}$$

Die hier interessierende Lösung der Gleichungen (40) ist diejenige, bei welcher $Y_k = 0$ (40,4) durch $y_k = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, N, \neq j$ und $Y_j = 0$ (40,3) durch $y_j \neq 0$ befriedigt wird. Wenn so alle Amplituden mit Ausnahme von y_j verschwinden, bleibt offenbar in $\frac{1}{y_j} X_j = 0$ (40,1) und $Y_j = 0$ (40,3) nur y_j und x_j allein stehen, was genau der in Abschn. 4 und 5 geübten Beschränkung auf die Einzelgleichung mit dem festen Index j entspricht. Die Aussagen über die Phasen x_k aus $\frac{1}{y_k} X_k = 0$ (40,2) sind hier ausnahmsweise gegenstandslos, da ja die zugehörigen Amplituden y_k sämtlich verschwinden.

Allerdings muß die gefundene Lösung $y_j \neq 0$, $y_k = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, N$, $\neq j$ noch als stabil nachgewiesen werden. Die Methode der kleinen Schwingungen gestattet die Stabilität der Lösungen $y_k = 0$ einfach nachzuweisen, indem man die Nachbarbewegung η_k zu $y_k = 0$ in (38) in (40,4) einsetzt. Man erhält

$$\dot{\eta_j} = -\varepsilon\frac{m_k}{M}\frac{\beta_k}{2}\eta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N, \neq j) ,$$

was sich unmittelbar durch

$$\eta_k = C_k\, e^{-\varepsilon\frac{m_k}{M}\frac{\beta_k}{2}\tau}$$

mit den Integrationskonstanten C_k lösen läßt. Demnach klingt jede etwa eingeleitete Störung exponentiell ab und die Lösung $y_k = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, N$, $\neq j$ ist daher stabil. Da die Phasenaussagen (40,2) nicht interessieren, bleibt nur noch die Prüfung der Stabilität der Lösungen $y_j \neq 0$ aus (40,1) und (40,3). In diesen Gleichungen kommt jedoch nur noch y_j, x_j allein vor, und zwar so, wie man es auch aus der Einzelgleichung allein herleiten würde. Die Stabilitätsdiskussion für die Einzelgleichung ist jedoch mit dem Ansatz (13) in den Abschn. 4 und 5 ausführlich durchgeführt worden, so daß der Nachweis bereits geführt ist. Tatsächlich liefert der Ansatz mit der Amplitude y_j und der Phase x_j die gleichen Stabilitätsaussagen. Für die zeichnerische Darstellung der Ergebnisse hatte jedoch die (A, B)-Ebene gewisse Vorzüge.

Anschaulich ist das Schwingungsverhalten des Systems (10) durchaus verständlich. Wenn die Erregerfrequenz $\omega \approx 2\,\omega_j$ ist, so hat nur das Schwingungsglied mit der Eigenfrequenz ω_j die zur Erregung erforderliche Abstimmung und damit eine erregende Kraft [vergleiche (40,1), (40,3)], während alle anderen Schwingungsglieder keine Erregerkräfte enthalten [vergleiche (40,2), (40,4)].

Da aber in allen Fällen dämpfende Kräfte wirken, müssen notwendig die Amplituden der verstimmten und damit nicht erregten Systemteile abklingen, so daß im eingeschwungenen Zustand das Schwingungsverhalten lediglich durch den Schwingerteil mit der Eigenfrequenz ω_j allein bestimmt wird. Die übliche Beschränkung auf die Untersuchung dieses eingliedrigen Schwingers dürfte daher durchaus berechtigt sein, wenn man Biegeschwingungen berechnen will, die mit der halben Frequenz der Längserregung verlaufen.

7. Zusammenfassung. Der axial pulsierend belastete Stab kann in Querschwingungen endlicher Amplitude übergehen, wenn die Längserregungsfrequenz in der Nähe des doppelten Wertes einer seiner Eigenfrequenzen der Querschwingungen liegt ($\omega \approx 2\,\omega_j$). Die dann eintretenden, nichtlinearen Schwingungen wurden für den momentenfrei gelagerten Stab untersucht. Insbesondere wurden die Einschwingvorgänge mit der Methode der langsam veränderlichen Phase und Amplitude berechnet, um die Abhängigkeit der stationären Schwingungen von einer Anfangsstörung in Querrichtung aufzufinden. Dabei ergab sich u. a. für Längserregungsfrequenzen $\omega > 2\,\omega_j$ die Möglichkeit des Zurückschwingens in die Ruhelage wie auch des Einschwingens auf Querschwingungen endlicher Amplitude. Weiter wurde die Resonanzkurve für längserregte Querschwingungen unter Berücksichtigung dämpfender Kräfte berechnet. Sie verläuft wie bei den erzwungenen nichtlinearen Schwingungen ganz im Endlichen. Da die genannten Ergebnisse wie üblich nur aus einer Schwingungsgleichung hergeleitet wurden, war die Berechtigung dieser Näherungsrechnung noch besonders nachzuweisen. Mit einer Theorie von *J. Haag* ließ sich dieser Nachweis für gedämpfte Schwingungen leicht in dem Sinne führen, daß die gefundenen Phänomene auch im vollständigen System der Schwingungsgleichungen wiederzufinden waren.

(Eingegangen am 6. Juli 1955.)

Aus dem Institut für Mechanische Schwingungstechnik der Technischen Hochschule Karlsruhe.
Anschrift des Verfassers: Priv.-Doz. Dr. *F. Weidenhammer*, Karlsruhe i. B., Hertzstraße 16, Bau 40.

Knicken

Theorie und Berechnung von Knickstäben, Knickvorschriften

Von Dr. sc. techn. Dipl. Bau.-Ing. **Curt F. Kollbrunner,** E. T. H. Zürich und Dipl.-Bau-Ing. **Martin Meister,** E. T. H. Zürich. Mit 179 Abbildungen. VIII, 232 Seiten Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen DM 27,—

Inhaltsübersicht: **I. Einführung.** — **II. Knicktheorien.** EULER: Die Knickung des elastischen Stabes. Formeln von NAVIER, SCHWARZ, RANKINE. Die Versuche von TETMAJER, ENGESSER und KÁRMÁN, SHANLEY. Rück- und Ausblick. — **III. Methoden zur Berechnung von Knickstäben.** Einleitung. Klassische Methode (Differentialgleichung der elastischen Linie). Energie-Methode. Methode ENGESSER-VIANELLO. — **IV. Die verschiedenen Knickfälle.** Gerade, vollwandige Stäbe mit konstantem Querschnitt: Zentrischer Druck. Exzentrischer Druck. Schwach gekrümmte und querbelastete Stäbe. Einfluß der Querkräfte. — Knicken gegliederter Stäbe: Einführung. Gitterstäbe. Rahmenstäbe. Bemessung der Verstrebung und der Bindebleche. Genauere Untersuchungen und zusätzliche Einflüsse. — Gerade Stäbe mit stetig veränderlichem Querschnitt und stetig veränderlicher Druckkraft. — Biegedrillknicken und Kippen: Einleitung. Die Biegung und Verdrehung von Stäben mit beliebigem, offenem Profil. Grundgleichungen der Biegedrillknickung. Biegedrillknickung zentrisch gedrückter Stäbe. Biegedrillknickung exzentrisch gedrückter Stäbe. Grundgleichungen der Kippstabilität querbelasteter Druckstäbe mit einfach-symmetrischem Querschnitt. Kippen von Balken ohne Längskraft. Querschnittswerte einiger wichtiger Querschnittsformen. Zusätzliche Einflüsse. Grenzen der Anwendung der Theorie des Biegedrillknickens und des Kippens. Schlußfolgerungen. — Knicken von Stabsystemen: Einleitung. Grundlagen. Elastisch gestützte Stäbe. Rahmen. Knicken der Eckpfosten von Gittermasten. — Knicken von gekrümmten Stäben: Kreisring. Zweigelenkbogen und eingespannter Bogen. Dreigelenkbogen. Zusätzliche Einflüsse. Seitliches Ausknicken von Bogenträgern. — Stabilitätsprobleme mit und ohne Gleichgewichtsverzweigung. Spannungsprobleme: Allgemeines. Stabilitätsprobleme mit Gleichgewichtsverzweigung. Stabilitätsprobleme ohne Gleichgewichtsverzweigung und Spannungsprobleme zweiter Ordnung. — **V. Knickvorschriften.** Einleitung. Verschiedene Aufstellungsarten für die Kurve der zulässigen Knickspannungen: Aufstellung der Kurve nach den Ergebnissen der Untersuchung eines zentrisch gedrückten Idealstabes. (Stab mit Gleichgewichtsverzweigung). Aufstellung der Kurve nach Versuchsergebnissen. Aufstellung der Kurve nach den Ergebnissen einer Traglastuntersuchung (Stab ohne Verzweigung des Gleichgewichtes). — Die deutschen Vorschriften DIN 4114 und einige europäische Vorschriften: Die deutschen Vorschriften DIN 4114. Einige andere europäische Vorschriften, die auf Grund von Traglastspannungen aufgestellt sind. Die schweizerischen Vorschriften, SIA-Norm Nr. 161, Entwurf 1951. Vergleich der verschiedenen Vorschriften. — Andere Knickprobleme. — **Namenverzeichnis.**

Der vorliegende Leitfaden erlaubt dem praktisch tätigen Ingenieur, sich in dem weitläufigen Gebiet der Knickprobleme zurechtzufinden, und zwar hinsichtlich der in Frage stehenden Theorien, der Berechnungsmethoden und in bezug auf die Gesichtspunkte, die bei der Beurteilung von Knickvorschriften zu beachten sind.

Neben der Behandlung vollwandiger und gegliederter Stäbe für elastische und elastisch-plastisch verformbare Materialien, verlangt die ständig zunehmende Bedeutung des Leichtbaues auch eine eingehendere Darstellung des Drillknickens einschließlich des Kippens als Sonderfall.

Des weiteren wird auf das Knicken von Stabsystemen eingegangen und auch das Knicken gekrümmter Stäbe, vor allem der Kreisring, der eingespannte, der Zwei- und Dreigelenkbogen, behandelt.

Der Erläuterung der Begriffe „Stabilitätsproblem mit und ohne Gleichgewichtsverzweigung", „Spannungsproblem zweiter Ordnung" usw., dient ein weiterer Abschnitt.

Der Schluß behandelt die verschiedenen Möglichkeiten, die bei der Aufstellung von Knickvorschriften zur Anwendung gelangen können. Es wird der grundsätzliche Aufbau einiger europäischer Knickvorschriften erläutert und diese miteinander verglichen.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Fachwerk und Rahmenwerk

Ein systematischer Grundriß der Statik des ebenen Tragwerkes. Von Dr.-Ing. **Walter Fries.** Mit 365 Bildern. X, 368 Seiten. Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 42.—

„Das vorliegende Werk gibt eine gute, in einem einzigen Buch zusammengefaßte Darstellung der verschiedenen bekannten Lösungsmethoden und -verfahren der Statik ebener Tragwerke. Indem die Grundlagen der Statik als bekannt vorausgesetzt und daher nur in ihren wesentlichen Punkten repetiert werden, bietet das Buch dem geübten Statiker manchen Vorteil. ... Nach einer zusammenfassenden Darstellung der Grundlagen werden die graphischen analytischen und kinematischen Lösungsverfahren der statisch bestimmten Tragwerke sowie die Ermittlung ihrer Formänderungen behandelt und hierauf die Berechnung der statisch unbestimmten Tragwerke, sowohl nach dem Kräfte- als auch nach dem Formänderungsverfahren, angeschlossen. Wertvoll für manchen Leser sind sicherlich die Hinweise auf die Schöpfer der einzelnen Methoden und auf ihre Werke ... Einem jeden, der einen Überblick über die Vielzahl der Berechnungsverfahren ebener Tragwerke gewinnen möchte, wird das vorliegende Buch sicherlich manch guten Dienst erweisen; es ist daher bestens zu empfehlen." *Schweizerische Bauzeitung*

Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker

Von Dr.-Ing. **R. Zurmühl,** Darmstadt. Mit 114 Abbildungen. XI, 481 Seiten Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 28,50

Inhaltsübersicht: **I. Einführung. Hilfsmittel.** — **II. Gleichungen:** Allgemeine Gleichungen mit einer Unbekannten. Algebraische Gleichungen. Gleichungen dritten und vierten Grades. Algebraische Gleichungen höheren Grades: Verfahren von Graeffe. Stabilitätskriterien. — **III. Lineare Gleichungen und Matrizen:** Der Gaußsche Algorithmus. Matrizen. Die Kehrmatrix. Das Eigenwertproblem. Iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme. Iterative Behandlung des Eigenwertproblems. — **IV. Interpolation und Integration:** Allgemeine Interpolationsformeln. Spezielle Interpolationsformeln. Numerische Integration. Graphische Integration. — **V. Ausgleichsrechnung:** Direkte Beobachtung einer Meßgröße. Ausgleich vermittelnder Beobachtungen. Bedingte Beobachtungen. — **VI. Darstellung willkürlicher Funktionen:** Harmonische Analyse. Ausgleichsparabeln. Annäherung willkürlicher Funktionen. — **VII. Differentialgleichungen: Anfangswertaufgaben:** Grundgedanken. Zeichnerische Verfahren. Das Runge-Kutta-Verfahren. Differenzenschemaverfahren (Interpolation). — **VIII. Differentialgleichungen: Rand- und Eigenwertaufgaben:** Einführung. Differenzen- und Quadraturverfahren. Funktionenansatz. Das Ritzsche Verfahren. Verfahren der schrittweisen Näherung. — **Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Mit 2 Beilagen des Springer-Verlages, Berlin / Göttingen / Heidelberg.

Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040.